Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
w Lublinie
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Magdalena Jastrzębska

Charakteryzacje brzegowe zespolonych odwzorowań quasiregularnych koła jednostkowego na siebie

Praca doktorska
napisana pod kierunkiem
dr hab. Dariusza Partyki, prof. KUL

Lublin 2022

Serdeczne podziękowania za pomoc,
cierpliwość oraz
cenne wskazówki składam
Panu dr hab. Dariuszowi Partyce, prof. KUL.

Spis treści

Wstęp

W 1987 roku Krzyż scharakteryzował brzegowe wartości odwzorowań quasikonforemnych koła jednostkowego $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ na siebie za pomocą quasisymetrycznych automorfizmów okręgu jednostkowego $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; por. warunek (4.1), który jest w istocie przeniesieniem na okrąg $\mathbb{T}$ klasycznego warunku quasisymetrii Beurlinga-Ahlforsa dla rosnących homeomorfizmów osi rzeczywistej $\mathbb{R}$ na siebie. Mówiąc ściślej, wykazał on, że

> *dla każdego odwzorowania quasikonforemnego f koła $\mathbb{D}$ na siebie, $f^*|_{\mathbb{T}}$ jest quasisymetrycznym automorfizmem okręgu $\mathbb{T}$, gdzie f^* jest homeomorficznym rozszerzeniem f na koło domknięte $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$. Na odwrót, dla każdego quasisymetrycznego automorfizmu g okręgu $\mathbb{T}$ istnieje odwzorowanie quasikonforemne f koła $\mathbb{D}$ o tej własności, że $f^*|_{\mathbb{T}}$ pokrywa się z g na $\mathbb{T}$.*

Dokładniej opisują to twierdzenia 4.1 i 4.2, które stały się inspiracją do napisania tej rozprawy. Jej motywem przewodnim jest uogólnienie wyników Krzyża na szerszą klasę odwzorowań, mianowicie na zespolone odwzorowania quasiregularne. Praca została podzielona na cztery rozdziały.

Rozdział pierwszy ma na celu uporządkowanie podstawowych faktów na temat odwzorowań quasiregularnych i quasikonforemnych, szeroko opisanych w książkach [28] i [33]. Odwzorowania te są określone na gruncie analizy rzeczywistej w przestrzeniach euklidesowych; por. podrozdziały 1.1 i 1.2. Z punktu widzenia analizy zespolonej szczególnie ważny jest przypadek takich odwzorowań w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Można je wówczas opisać w języku analizy zespolonej jako odwzorowania w płaszczyźnie zespolonej $\mathrm{E}(\mathbb{C})$, o czym traktuje podrozdział 1.3. Określone w ten sposób zespolone odwzorowania quasiregularne stanowią naturalne uogólnienie funkcji holomorficznych, i przez to stają się interesującym obiektem badań. W tej rozprawie rozważany jest problem charakteryzacji brzegowej quasiregularnych odpowiedników skończonych iloczynów Blaschkego. Pełne jego rozwiązanie jest przedstawione w rozdziale czwartym w postaci dwóch twierdzeń 4.4 i 4.7, które są głównymi wynikami tej rozprawy. Uogólniają one wspomnianą na początku charakteryzację brzegową Krzyża

odwzorowań quasikonforemnych koła $\mathbb{D}$ na siebie. Precyzyjne sformułowanie tych twierdzeń oraz ich dowody wymagają szeregu faktów pomocniczych opisanych szczegółowo w rozdziałach drugim i trzecim. Pierwszy z nich dotyczy równania funkcyjnego (2.1). Istnienie globalnych rozwiązań tego równania przy dodatkowym założeniu różnowartościowości funkcji f jest wykazane w podrozdziale 2.2. W podrozdziale 2.3 badana jest różnowartościowość takich rozwiązań. Wyniki przedstawione w podrozdziałach 2.1–2.3 zostały użyte w podrozdziale 2.4 do zdefiniowania orientacji homeomorfizmów w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{C})$. Przypomniano w nim również geometryczną charakteryzację odwzorowań quasikonforemnych w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ oraz ich własności w zakresie niezbędnym w dalszej części rozprawy. Wiodącym zagadnieniem rozdziału trzeciego jest uogólnienie klasycznego twierdzenia Fatou dla skończonych iloczynów Blaschkego na ich quasiregularne odpowiedniki. Fundamentalnym wynikiem dla rozważań w rozdziale czwartym jest wykazane w podrozdziale 3.3 twierdzenie 3.12, które jest wariantem twierdzenia Vuorinena; por. twierdzenie 3.1. Dwa wcześniejsze podrozdziały wspierają wypowiedź i dowód twierdzenia 3.12. W podrozdziale 3.1 zawarte są informacje na temat stopnia funkcji ciągłej w punkcie i jego własności. Są to znane fakty, a ich precyzyjne dowody zostały opracowane na podstawie podrozdziałów 2.1–2.3. Podrozdział 3.2 zawiera wariant wspomnianego twierdzenia Fatou, w którym osłabiono warunek brzegowy i dołączono informację o stopniach zer. Ostatni rozdział — o czym już była mowa — zawiera główne wyniki rozprawy. W podrozdziałach 4.1 i 4.2 podane są szczegółowe dowody twierdzeń 4.4 i 4.7, odpowiednio. Uogólniają one twierdzenia 4.1 i 4.2, wykazane przez Krzyża w [16]; por. uwagi 4.5 i 4.8. Uogólnienie polega przede wszystkim na zastąpieniu odwzorowań quasikonforemnych koła $\mathbb{D}$ na siebie przez zespolone odwzorowania quasiregularne f w kole $\mathbb{D}$ takie, że $|f(0)| \neq 1$ i $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$, gdzie $\mathrm{CS}(f)$ jest zbiorem wszystkich punktów skupienia funkcji f na brzegu $\mathbb{T}$; por. wzór (3.35). W podrozdziale 4.3 są zebrane uwagi uzupełniające rozważania z poprzednich dwóch podrozdziałów oraz przykłady zastosowań twierdzenia 3.12, wyrażone przez wnioski 4.12 i 4.13. Pierwszy z nich dotyczy nierówności Schwarza, a drugi nierówności Mori'ego dla zespolonych odwzorowań quasiregularnych f w kole $\mathbb{D}$ spełniających warunek brzegowy $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$.

W pracy przyjmujemy następujące oznaczenia: $\mathbb{D}(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$, $\mathbb{D}(a;r,R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ i $\mathbb{T}(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$ dla $a \in \mathbb{C}$ i $r, R \in \mathbb{R}$. Wtedy $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a,r)) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\}$ i $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a;r,R)) = \{z \in \mathbb{C} : r \leqslant |z-a| \leqslant R\}$, gdzie cl jest operacją domknięcia w $\mathrm{E}(\mathbb{C})$. W szczególności $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0,1)$ jest kołem jednostkowym, zaś $\mathbb{T} := \mathbb{T}(0,1)$ okręgiem jednostkowym. Ponadto dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Z}$ określamy zbiory $\mathbb{Z}_{p,q} := \{n \in \mathbb{Z} : p \leqslant n \leqslant q\}$ i $\mathbb{Z}_p := \{n \in \mathbb{Z} : p \leqslant n\}$. W szczególności $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_1$. Przyjmujemy również $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$.

Rozdział 1

Odwzorowania quasiregularne w przestrzeni euklidesowej

Rozdział ten poświęcamy przypomnieniu podstawowych faktów teorii odwzorowań quasiregularnych w przestrzeniach euklidesowych.

Dla dowolnie zadanego $p \in \mathbb{N}$ funkcja

$$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \ni (x, y) \mapsto \langle x|y\rangle_p := \sum_{k=1}^{p} x_k y_k \tag{1.1}$$

spełnia własności

$$\langle x|y\rangle_p = \langle y|x\rangle_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^p; \tag{1.2}$$

$$\langle \mu x + \nu y|z\rangle_p = \mu\langle x|z\rangle_p + \nu\langle y|z\rangle_p, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^p; \tag{1.3}$$

$$\langle x|x\rangle_p > 0, \quad x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_p\}, \tag{1.4}$$

gdzie 0_p jest p-wyrazowym ciągiem zerowym, tzn.

$$\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto 0_p(k) := 0. \tag{1.5}$$

Dlatego funkcja $\langle\cdot|\cdot\rangle_p$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^p; +, \cdot)$ ze standardowymi operacjami dodawania wektorów

$$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \ni (x, y) \mapsto x + y := \{\mathbb{Z}_{1,p} \ni k \mapsto x_k + y_k\}$$

i mnożenia wektora przez skalar

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \ni (\mu, x) \mapsto \mu x := \{\mathbb{Z}_{1,p} \ni k \mapsto \mu x_k\}.$$

Z klasycznej nierówności Schwarza

$$\langle x|y\rangle_p^2 \leqslant \langle x|x\rangle_p \langle y|y\rangle_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^p, \tag{1.6}$$

wynika, że funkcjonał

$$\mathbb{R}^p \ni x \mapsto |x|_p := \sqrt{\langle x|x\rangle_p}, \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{1.7}$$

spełnia warunki

$$|\mu x|_p = |\mu||x|_p, \quad \mu \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^p; \tag{1.8}$$

$$|x+y|_p \leqslant |x|_p + |y|_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^p; \tag{1.9}$$

$$|x|_p > 0, \quad x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_p\}, \tag{1.10}$$

a więc jest normą w przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^p; +, \cdot)$. Z własności (1.8), (1.9) i (1.10) wynika, że funkcja

$$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \ni (x, y) \mapsto \rho_p(x, y) := |x - y|_p \tag{1.11}$$

jest metryką w zbiorze $\mathbb{R}^p$, a więc struktura $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p) := (\mathbb{R}^p, \rho_p)$ — zwana *p-wymiarową przestrzenią euklidesową* — jest przestrzenią metryczną. Ciąg $\mathbb{Z}_{1,p} \ni k \mapsto e_k$ określony wzorem

$$\mathbb{Z}_{1,p} \ni l \mapsto e_k(l) := 1 - \min(\{|k - l|, 1\}), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,p}, \tag{1.12}$$

spełnia w oczywisty sposób warunki

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k, \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{1.13}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k e_k = 0_p \Rightarrow \mu = 0_p, \quad \mu \in \mathbb{R}^p. \tag{1.14}$$

Dlatego ciąg $\mathbb{Z}_{1,p} \ni k \mapsto e_k$ jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^p; +, \cdot)$, zwaną zazwyczaj *bazą naturalną przestrzeni* $(\mathbb{R}^p; +, \cdot)$.

W szczególnym przypadku dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej można przenieść struktury $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ i $(\mathbb{R}^2; +, \cdot)$ na zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ za pomocą bijekcji

$$\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto \ell(x) := x_1 + \mathrm{i}x_2 \tag{1.15}$$

zbioru $\mathbb{R}^2$ na zbiór $\mathbb{C}$. W ten sposób określamy *płaszczyznę zespoloną* $\mathrm{E}(\mathbb{C}) := (\mathbb{R}^2, \rho_\ell)$, gdzie

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (u, v) \mapsto \rho_\ell(u, v) := \rho_2(\ell^{-1}(u), \ell^{-1}(v)). \tag{1.16}$$

Stąd płaszczyzna zespolona jest przestrzenią metryczną, a odwzorowanie ℓ jest izometrią przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ na przestrzeń $\mathrm{E}(\mathbb{C})$. W konsekwencji bijekcja ℓ przenosi geometrię

i topologię przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ na zbiór $\mathbb{C}$. Operowanie przestrzenią $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ ma tę zaletę, że dysponujemy tutaj dodatkowo strukturą arytmetyczną ciała liczb zespolonych $(\mathbb{C};+,\cdot)$, mocniejszą w porównaniu ze strukturą przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^2;+,\cdot)$. Dla przykładu, określając moduł liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ wzorem

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto |z| := |\ell^{-1}(z)|_2 \tag{1.17}$$

widzimy, że $|z|^2 = z\overline{z}$ i $\rho_\ell(z,w) = |z-w|$ dla $z, w \in \mathbb{C}$. Dlatego w dalszym ciągu do badania funkcji w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ będziemy używać płaszczyzny zespolonej modelując je poprzez funkcje zespolone jednej zmiennej za pomocą izometrii ℓ. Płaszczyzna zespolona odgrywa fundamentalną rolę w analizie zespolonej. Zauważmy, że *oś rzeczywista*, oznaczana przez $\mathrm{E}(\mathbb{R})$, która jest podstawową przestrzenią dla analizy rzeczywistej, jest zawężeniem przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ do zbioru liczb rzeczywistych. Przestrzeń $\mathrm{E}(\mathbb{R})$ jest oczywiście izometrycznie równoważna jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathrm{E}(\mathbb{R}^1)$, przy czym izometrią jest odwzorowanie

$$\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto \ell_{\mathbb{R}}(x) := x_1. \tag{1.18}$$

1.1 Funkcje absolutnie ciągłe na liniach prostych

Zespolone odwzorowania quasiregularne stanowią znaczące rozszerzenie klasy funkcji analitycznych poprzez znaczne osłabienie różniczkowalności tych pierwszych. W tym celu rozważa się własność *absolutnej ciągłości funkcji na liniach prostych*, która opiera się na pojęciu absolutnej ciągłości. Przypomnijmy, że dla dowolnego niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$, przestrzeni metrycznej (X, ρ) i funkcji $f : A \to X$, f nazywamy *funkcją absolutnie ciągłą* :⇔ dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ o tej własności, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \rho(f(x_k), f(y_k)) < \varepsilon, \quad x, y \in A^n. \tag{1.19}$$

W szczególności funkcja absolutnie ciągła $f : A \to X$ jest jednostajnie ciągła. W przypadku, gdy $(X, \rho) = \mathrm{E}(\mathbb{R})$, funkcja f ma wahanie ograniczone na dowolnym przedziale domkniętym i ograniczonym $I \subset A$, i w konsekwencji f jest różniczkowalna p.w. (prawie wszędzie) w I względem miary Lebesguea μ na $\mathbb{R}$. Wynika to z klasycznego twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu funkcji monotonicznych; por. np. [29, Theorem 1.26]. Co więcej, funkcję f można wtedy odtworzyć przez całkowanie jej pochodnej; por. np. [29, Theorem 1.28].

Przyjmijmy oznaczenie

$$[a;b]_p := \{x \in \mathbb{R}^p : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k,\ k \in \mathbb{Z}_{1,p}\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^p.$$

Zbiór $[a;b]_p$ nazywa się *przedziałem domkniętym w* $\mathbb{R}^p$ o początku w punkcie $a \in \mathbb{R}^p$ i końcu w punkcie $b \in \mathbb{R}^p$, o ile $a_k \leqslant b_k$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,p}$. Oznaczmy przez $\mathcal{M}_n$ i μ_n odpowiednio σ-ciało zbiorów Lebesgue'a w zbiorze $\mathbb{R}^n$ oraz n-wymiarową miarę Lebesgue'a dla $n \in \mathbb{N}$. Dla dowolnych $n \in \mathbb{Z}_{1,p}$ i $a \in \mathbb{R}$ funkcja

$$\mathbb{R}^{p-1} \ni x \mapsto \ell_{n,a}(x) := ae_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k + \sum_{k=n}^{p-1} x_k e_{k+1}, \tag{1.20}$$

gdzie

$$\sum_{k=1}^{0} x_k e_k := 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=p}^{p-1} x_k e_{k+1} := 0,$$

jest bijekcją zbioru $\mathbb{R}^{p-1}$ na zbiór $\mathbb{R}^p_{n,a} := \{x \in \mathbb{R}^p : x_n = a\}$.

Ustalmy dowolnie zbiór niepusty $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ i przestrzeń metryczną (X, ρ).

Definicja 1.1 ([28, Chap. I, Sec. 1])**.** Mówimy, że funkcja $f : \Omega \to X$ jest *funkcją absolutnie ciągłą na liniach prostych z przestrzeni* $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ *do przestrzeni* (X, ρ) $:\Leftrightarrow$ dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}^p$ i $n \in \mathbb{Z}_{1,p}$, jeśli $\emptyset \neq [a;b]_p \subset \Omega$ to istnieje zbiór $E \subset [a;b]_p \cap \mathbb{R}^p_{n,a_n}$ o tej własności, że funkcja

$$[a_n; b_n] \ni t \mapsto f\Big(te_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k + \sum_{k=n}^{p-1} x_k e_{k+1}\Big) \tag{1.21}$$

jest absolutnie ciągła dla $x \in E$ i $\mu_{p-1}\Big(\ell^{-1}_{n,a_n}([a;b]_p \cap \mathbb{R}^p_{n,a_n} \setminus E)\Big) = 0$.

Rodzinę wszystkich funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ absolutnie ciągłych na liniach prostych z przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ do przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ będziemy oznaczać przez $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{R}^p))$. Symbol ACL jest skrótem anglojęzycznej nazwy *absolutely continuous on lines*; por. np. [18, Chap. III, §3.1].

Stosując definicję 1.1 dla przypadku $p := 2$ można dwuwymiarowe pojęcie absolutnej ciągłości na liniach prostych przenieść za pomocą bijekcji ℓ na przestrzeń $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ w następujący sposób.

Definicja 1.2. Mówimy, że funkcja $f : \Omega \to X$ jest *funkcją absolutnie ciągłą na liniach prostych z przestrzeni* $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ *do przestrzeni* (X, ρ) $:\Leftrightarrow$ złożenie $f \circ \ell$ jest funkcją absolutnie ciągłą na liniach prostych z przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ do przestrzeni (X, ρ).

Rodzinę wszystkich funkcji $f : \Omega \to \mathbb{C}$ absolutnie ciągłych na liniach prostych z przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ do przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ będziemy oznaczać przez $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$. Funkcje tej klasy można scharakteryzować w bardziej bezpośredni sposób. Przez analogię do przedziału domkniętego w $\mathbb{R}^2$ określamy *przedział domknięty w* $\mathbb{C}$ *o początku w punkcie* $a \in \mathbb{C}$ *i końcu w punkcie* $b \in \mathbb{C}$ wzorem

$$[a;b] := \Big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re} b \wedge \operatorname{Im} a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im} b\Big\} = \ell\Big([\ell^{-1}(a); \ell^{-1}(b)]_2\Big).$$

Twierdzenie 1.3. *Dla każdej funkcji $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $a, b \in \mathbb{C}$, jeśli $\emptyset \neq [a; b] \subset \Omega$ to zachodzą następujące warunki:*

(i) *funkcja $[\operatorname{Re} a; \operatorname{Re} b] \ni t \mapsto f(t+\mathrm{i}y)$ jest absolutnie ciągła dla p.w. $y \in [\operatorname{Im} a; \operatorname{Im} b]$;*

(ii) *funkcja $[\operatorname{Im} a; \operatorname{Im} b] \ni t \mapsto f(x+\mathrm{i}t)$ jest absolutnie ciągła dla p.w. $x \in [\operatorname{Re} a; \operatorname{Re} b]$.*

W powyższych warunkach absolutną ciągłość stosujemy w odniesieniu do przestrzeni metrycznej $(X, \rho) := \mathrm{E}(\mathbb{C})$, zaś skrót „dla p.w." oznacza „dla prawie wszystkich" w sensie miary Lebesgue'a μ na osi rzeczywistej. Warunki (i) i (ii) pojawiają się w [18, Lemma 1.1, p. 162] w związku z analityczną charakteryzacją odwzorowań quasikonforemnych płaszczyzny zespolonej.

Dowód. Ustalając dowolnie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ załóżmy, że $f \in \mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$. Wtedy $\tilde{f} := \ell^{-1} \circ f \circ \ell \in \mathrm{ACL}(\ell^{-1}(\Omega); \mathrm{E}(\mathbb{R}^2))$. Dla dowolnie zadanych $a, b \in \mathbb{C}$ załóżmy, że $\emptyset \neq [a; b] \subset \Omega$. Wtedy $\tilde{a} := \ell^{-1}(a) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{b} := \ell^{-1}(b) \in \mathbb{R}^2$, $[\tilde{a}; \tilde{b}]_2 = \ell^{-1}([a; b]) \subset \ell^{-1}(\Omega)$ i istnieją zbiory mierzalne $\tilde{E}_m \subset [\tilde{a}; \tilde{b}]_2 \cap \mathbb{R}^2_{m,\tilde{a}_m}$, $m \in \mathbb{Z}_{1,2}$, o tej własności, że funkcje

$$(1.22)\quad [\tilde{a}_1; \tilde{b}_1] \ni t \mapsto \tilde{f}_{1,y}(t) := \tilde{f}\Big(te_1 + ye_2\Big) \quad \text{i} \quad [\tilde{a}_2; \tilde{b}_2] \ni t \mapsto \tilde{f}_{2,x}(t) := \tilde{f}\Big(te_2 + xe_1\Big)$$

są absolutnie ciągłe dla wszystkich $y \in E_1 := \ell_{\mathbb{R}} \circ \ell^{-1}_{1,\tilde{a}_1}(\tilde{E}_1)$ i $x \in E_2 := \ell_{\mathbb{R}} \circ \ell^{-1}_{2,\tilde{a}_2}(\tilde{E}_2)$, odpowiednio, oraz

$$(1.23)\quad \begin{aligned} \mu([\tilde{a}_2; \tilde{b}_2] \setminus E_1) &= \mu_1\Big(\ell^{-1}_{1,\tilde{a}_1}([\tilde{a}; \tilde{b}]_2 \cap \mathbb{R}^2_{1,\tilde{a}_1} \setminus \tilde{E}_1)\Big) = 0, \\ \mu([\tilde{a}_1; \tilde{b}_1] \setminus E_2) &= \mu_1\Big(\ell^{-1}_{2,\tilde{a}_2}([\tilde{a}; \tilde{b}]_2 \cap \mathbb{R}^2_{2,\tilde{a}_2} \setminus \tilde{E}_2)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Odnotujmy również, że

$$(1.24)\quad \tilde{a}_1 = \operatorname{Re} a,\ \tilde{a}_2 = \operatorname{Im} a,\ \tilde{b}_1 = \operatorname{Re} b \ \text{ i } \ \tilde{b}_2 = \operatorname{Im} b.$$

Wtedy dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ o tej własności, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$(1.25)\quad \sum_{k=1}^{n} |t'_k - t''_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \rho_2(\tilde{f}_{1,y}(t'_k), \tilde{f}_{1,y}(t''_k)) < \varepsilon, \quad t', t'' \in [\tilde{a}_1; \tilde{b}_1]^n,\ y \in E_1,$$

oraz

$$(1.26)\quad \sum_{k=1}^{n} |t'_k - t''_k| < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \rho_2(\tilde{f}_{2,x}(t'_k), \tilde{f}_{2,x}(t''_k)) < \varepsilon, \quad t', t'' \in [\tilde{a}_2; \tilde{b}_2]^n,\ x \in E_2.$$

Ze wzorów (1.15), (1.16) i (1.22) wynika, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in E_2$ i $y \in E_1$,

$$\begin{aligned} \rho_2(\tilde{f}_{1,y}(t'_k), \tilde{f}_{1,y}(t''_k)) &= \rho_\ell(f \circ \ell(t'_k e_1 + ye_2), f \circ \ell(t''_k e_1 + ye_2)) \\ &= \rho_\ell(f(t'_k + \mathrm{i}y), f(t''_k + \mathrm{i}y)), \quad t', t'' \in [\tilde{a}_1; \tilde{b}_1]^n,\ k \in \mathbb{Z}_{1,n}, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\rho_2(\tilde{f}_{2,x}(t'_k), \tilde{f}_{2,x}(t''_k)) &= \rho_\ell(f \circ \ell(t'_k e_2 + x e_1), f \circ \ell(t''_k e_2 + x e_1)) \\ &= \rho_\ell(f(x + \mathrm{i}t'_k), f(x + \mathrm{i}t''_k)), \quad t', t'' \in [\tilde{a}_2; \tilde{b}_2]^n,\ k \in \mathbb{Z}_{1,n}.\end{aligned}$$

Stąd oraz z (1.25) i (1.26) wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |t'_k - t''_k| < \delta \Rightarrow \rho_\ell(f(t'_k + \mathrm{i}y), f(t''_k + \mathrm{i}y)) < \varepsilon, \quad y \in E_1,\ t', t'' \in [\tilde{a}_1; \tilde{b}_1]^n,$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{n} |t'_k - t''_k| < \delta \Rightarrow \rho_\ell(f(x + \mathrm{i}t'_k), f(x + \mathrm{i}t''_k)) < \varepsilon, \quad x \in E_2,\ t', t'' \in [\tilde{a}_2; \tilde{b}_2]^n,$$

co łącznie z (1.23) i (1.24) implikuje warunki (i) i (ii). Odwracając tok powyższego rozumowania otrzymujemy implikację przeciwną, co kończy dowód. □

1.2 Odwzorowania quasiregularne

Dla dowolnie zadanych $p, q \in \mathbb{N}$, zbioru niepustego $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ i funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ definiujemy dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,p}$ operator k-tej pochodnej cząstkowej

$$(1.27) \qquad \Omega \ni x \mapsto \partial_{|k} f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x + te_k) - f(x)}{t} & , \text{ gdy } x \in \mathrm{D}_k(f) \\ 0_q & , \text{ gdy } x \in \Omega \setminus \mathrm{D}_k(f), \end{cases}$$

gdzie $\mathrm{D}_k(f)$ jest zbiorem wszystkich punktów $x \in \Omega$, które są punktami skupienia zbioru $\Omega \cap \{x + te_k : t \in \mathbb{R}\}$ w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ i dla których istnieje granica w (1.27) w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^q)$. Tu i w dalszym ciągu stale przyjmujemy, że ciąg $\mathbb{Z}_{1,p} \ni k \mapsto e_k$ jest bazą naturalną przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^p; +, \cdot)$. Dla każdego $x \in \Omega$ określamy macierz

$$(1.28) \qquad f'(x) := \Big[\mathbb{Z}_{1,p} \times \mathbb{Z}_{1,q} \ni (k, l) \mapsto \langle \partial_{|k} f(x) | e'_l \rangle_q\Big],$$

zwaną *pochodną funkcji f w punkcie x*, gdzie ciąg $\mathbb{Z}_{1,q} \ni l \mapsto e'_l$ jest bazą naturalną przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^q; +, \cdot)$. Z macierzą $f'(x)$ można stowarzyszyć przekształcenie liniowe

$$(1.29) \qquad \mathbb{R}^p \ni h \mapsto \nabla_x f(h) := \sum_{l=1}^{q} \Big(\sum_{k=1}^{p} \langle \partial_{|k} f(x) | e'_l \rangle_q \langle h | e_k \rangle_p \Big) e'_l$$

przestrzeni $(\mathbb{R}^p; +, \cdot)$ w przestrzeń $(\mathbb{R}^q; +, \cdot)$, po czym rozważać funkcjonały

$$(1.30) \qquad \Omega \ni x \mapsto |f'(x)|_+ := \sup\Big(\{|\nabla_x f(h)|_q : h \in \mathbb{R}^p \wedge |h|_p = 1\}\Big),$$

$$(1.31) \qquad \Omega \ni x \mapsto |f'(x)|_- := \inf\Big(\{|\nabla_x f(h)|_q : h \in \mathbb{R}^p \wedge |h|_p = 1\}\Big).$$

Liczba $|f'(x)|_+$ jest w istocie normą supremum przekształcenia $\nabla_x f$. Ponieważ sfera $\{h \in \mathbb{R}^p : |h|_p = 1\}$ jest zbiorem zwartym w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$, więc

$$|f'(x)|_+ = \max\Big(\{|\nabla_x f(h)|_q : h \in \mathbb{R}^p \wedge |h|_p = 1\}\Big), \quad x \in \Omega, \tag{1.32}$$

$$|f'(x)|_- = \min\Big(\{|\nabla_x f(h)|_q : h \in \mathbb{R}^p \wedge |h|_p = 1\}\Big), \quad x \in \Omega. \tag{1.33}$$

Jeśli $p = q$ to dla każdego punktu $x \in \Omega$ macierz $f'(x)$ jest kwadratowa, w związku z czym określony jest wyznacznik $\det f'(x)$, którego wartość

$$\mathrm{J}[f](x) := \det f'(x) \tag{1.34}$$

nazywa się *Jakobianem funkcji f w punkcie x.*

Uwaga 1.4. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła z $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ do $\mathrm{E}(\mathbb{R}^q)$ a zbiór Ω jest otwarty w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$. Wtedy każda funkcja $\Omega \ni x \mapsto \langle \partial_{|n} f(x) | e'_m \rangle_q \in \mathbb{R}$ jest borelowska dla $n \in \mathbb{Z}_{1,p}$ i $m \in \mathbb{Z}_{1,q}$, a więc i mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{M}_p$. Jest to konsekwencją tego, że punktowa granica górna i dolna ciągu rzeczywistych funkcji ciągłych są funkcjami borelowskimi; por. [31, Theorem 25.1]. Dlatego zbiór $\mathrm{D}_n(f)$ jest borelowski w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ dla $n \in \mathbb{Z}_{1,p}$; por. [31, Theorem 25.2].

Załóżmy dodatkowo, że $f \in \mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{R}^p))$. Ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{Z}_{1,p}$ i $a, b \in \mathbb{R}^p$ spełniające warunek $\emptyset \neq [a; b]_p \subset \Omega$. Na mocy definicji 1.1 istnieje zbiór $E_n \subset [a; b]_p \cap \mathbb{R}^p_{n,a_n}$ o tej własności, że funkcja dana wzorem (1.21) jest absolutnie ciągła dla $x \in E_n$ i $\mu_{p-1}\Big(\ell^{-1}_{n,a_n}([a; b]_p \cap \mathbb{R}^p_{n,a_n} \setminus E_n)\Big) = 0$. Wtedy każda z funkcji $\langle f | e'_m \rangle_q$, $m \in \mathbb{Z}_{1,q}$, ma wahanie ograniczone, skąd na mocy twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu funkcji monotonicznej wynika, że jest ona różniczkowalna p.w. w przedziale $[a_n; b_n]$, czyli

$$\mu\Big([a_n; b_n] \setminus \{t \in \mathbb{R} : x + te_n \in \mathrm{D}_n(f)\}\Big) = 0, \quad x \in E_n. \tag{1.35}$$

Ponieważ zbiór $\mathrm{D}_n(f)$ jest borelowski w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$, więc $\mathrm{D}_n(f) \in \mathcal{M}_p$ i stosując twierdzenie całkowe Fubiniego do funkcji

$$[a; b]_p \ni u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{gdy } u \in \mathrm{D}_n(f) \\ 0 & \text{gdy } u \notin \mathrm{D}_n(f), \end{cases}$$

otrzymujemy $\mu_p([a; b]_p) = \mu_p(\mathrm{D}_n(f) \cap [a; b]_p)$, skąd $\mu_p([a; b]_p \setminus \mathrm{D}_n(f)) = 0$. Korzystając z przeliczalnej addytywności miary dostajemy $\mu_p(\Omega \setminus \mathrm{D}_n(f)) = 0$ dla $n \in \mathbb{Z}_{1,p}$. Ostatecznie

$$\mu_p\Big(\Omega \setminus \bigcap_{n=1}^{p} \mathrm{D}_n(f)\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{p} \mu_p(\Omega \setminus \mathrm{D}_n(f)) = 0, \tag{1.36}$$

a więc dla μ_p-p.w. $x \in \Omega$ istnieją wszystkie granice we wzorze (1.27) dla $k \in \mathbb{Z}_{1,p}$, czyli istnieją wszystkie pochodne cząstkowe w x.

Dla dowolnie zadanych $p \in \mathbb{N}$ i niepustego obszaru Ω w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ odwzorowania quasiregularne w tej przestrzeni określane są na podstawie uwagi 1.4 w następujący sposób.

Definicja 1.5 ([33, Sec. 10.1])**.** Dla dowolnych $K \in [1; +\infty)$ i funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, f nazywa się *odwzorowaniem K-quasiregularnym w przestrzeni* $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ $:\Leftrightarrow$ zachodzą następujące warunki:

(i) f jest ciągła w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$;

(ii) f jest absolutnie ciągła na liniach prostych z $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ do $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$;

(iii) $\frac{1}{K}|f'(x)|_+^p \leqslant \mathrm{J}[f](x) \leqslant K|f'(x)|_-^p$ dla μ_p-p.w. $x \in \Omega$;

(iv) $\int_E |\partial_{|k} f|^p \mathrm{d}\mu_p < +\infty$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,p}$ i każdego zbioru zwartego E w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ zawartego w Ω.

Definicja 1.6 ([33, Sec. 10.1])**.** Dla dowolnej funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, f nazywa się *odwzorowaniem quasiregularnym w przestrzeni* $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ $:\Leftrightarrow$ f jest odwzorowaniem K-quasiregularnym w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ dla pewnego $K \in [1; +\infty)$.

Odwzorowania quasiregularne w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ będące homeomorfizmami nazywają się odwzorowaniami quasikonforemnymi w tej przestrzeni. Precyzyjniej rzecz ujmują następujące definicje.

Definicja 1.7 ([33, Sec. 10.7])**.** Dla dowolnych $K \in [1; +\infty)$ i funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, f nazywa się *odwzorowaniem K-quasikonforemnym w przestrzeni* $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ $:\Leftrightarrow$ f jest homeomorfizmem będącym odwzorowaniem K-quasiregularnym w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$.

Definicja 1.8 ([33, Sec. 10.7])**.** Dla dowolnej funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, f nazywa się *odwzorowaniem quasikonforemnym w przestrzeni* $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ $:\Leftrightarrow$ f jest homeomorfizmem będącym odwzorowaniem quasiregularnym w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$.

Teoria odwzorowań qusiregularnych była rozwijana przez wielu matematyków, jak między innymi: Martio, Rickman, Vuorinen. Fundamentalną pozycją w tej dziedzinie jest monografia [28]. Szereg istotnych wyników tej teorii można znaleźć również w książce [33]. Jednym z nich jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.9 ([33, Theorem 10.16])**.** *Dla dowolnych $p \in \mathbb{Z}_2$, obszaru Ω w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ i funkcji $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, jeśli f jest odwzorowaniem quasiregularnym w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ i różnym od funkcji stałej, to*

(i) $\mu_p(B_f) = \mu_p(f(B_f)) = 0$, *gdzie* B_f *jest zbiorem punktów rozgałęzień odwzorowania* f, *tzn. zbiorem wszystkich punktów* $x \in \Omega$ *takich, że* f *nie jest lokalnym homeomorfizmem w* x*;*

(ii) $\mathrm{J}[f](x) > 0$ *dla* μ_p*-p.w.* $x \in \Omega$.

1.3 Zespolone odwzorowania quasiregularne

W dalszym ciągu przyjmujemy, że wszelkie topologiczne pojęcia odnoszą się domyślnie do przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{C})$. Niech Ω będzie obszarem niepustym. Korzystając z izometrycznej równoważności przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ i $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ definiujemy odwzorowania quasiregularne płaszczyzny zespolonej następująco.

Definicja 1.10. Dla dowolnego $K \in [1; +\infty)$ funkcję $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nazywamy *odwzorowaniem* K*-quasiregularnym płaszczyzny zespolonej* (alt. *zespolonym odwzorowaniem* K*-quasiregularnym*) $:\Leftrightarrow$ złożenie $\ell^{-1} \circ f \circ \ell$ jest odwzorowaniem K-quasiregularnym w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$.

Klasę wszystkich odwzorowań K-quasiregularnych płaszczyzny zespolonej określonych w Ω będziemy oznaczać przez $\mathrm{QR}(\Omega; K)$.

Definicja 1.11. Funkcję $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nazywamy *odwzorowaniem quasiregularnym płaszczyzny zespolonej* (alt. *zespolonym odwzorowaniem quasiregularnym*) $:\Leftrightarrow$ złożenie $\ell^{-1} \circ f \circ \ell$ jest odwzorowaniem quasiregularnym w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$.

Klasę wszystkich odwzorowań quasiregularnych płaszczyzny zespolonej określonych w Ω będziemy oznaczać przez $\mathrm{QR}(\Omega)$.

Dalszą część tego podrozdziału poświęcimy charakteryzacji odwzorowań quasiregularnych płaszczyzny zespolonej wyłącznie w terminach analizy zespolonej. Zaczniemy od przypomnienia operatorów różniczkowania wykorzystywanych w analizie zespolonej funkcji jednej zmiennej. Podobnie jak w przypadku operatorów pochodnej cząstkowej danej wzorem (1.27) określamy *operatory pochodnych rzeczywistych* przyporządkowujące funkcji $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcje

$$\Omega \ni z \mapsto \partial_{\mathrm{x}} f(z) := \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(z+t) - f(z)}{t} & , \text{ gdy } z \in \mathrm{D_x}(f) \\ 0 & , \text{ gdy } z \in \Omega \setminus \mathrm{D_x}(f), \end{cases} \tag{1.37}$$

gdzie $\mathrm{D_x}(f)$ jest zbiorem wszystkich punktów $z \in \Omega$, które są punktami skupienia zbioru $\Omega \cap \{z + t : t \in \mathbb{R}\}$ i dla których istnieje granica w (1.37), oraz

$$\Omega \ni z \mapsto \partial_{\mathrm{y}} f(z) := \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(z+\mathrm{i}t) - f(z)}{t} & , \text{ gdy } z \in \mathrm{D_y}(f) \\ 0 & , \text{ gdy } z \in \Omega \setminus \mathrm{D_y}(f), \end{cases} \tag{1.38}$$

gdzie $\mathrm{D_y}(f)$ jest zbiorem wszystkich punktów $z \in \Omega$, które są punktami skupienia zbioru $\Omega \cap \{z + \mathrm{i}t : t \in \mathbb{R}\}$ i dla których istnieje granica w (1.38). Za pomocą operatorów ∂_{x} i ∂_{y} definiujemy *operatory pochodnych formalnych*

(1.39) $$\partial := \frac{1}{2}(\partial_{\mathrm{x}} - \mathrm{i}\partial_{\mathrm{y}}) \quad \text{oraz} \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_{\mathrm{x}} + \mathrm{i}\partial_{\mathrm{y}}).$$

Ze wzorów (1.39) wynika, że dla każdego $z \in \mathrm{D_x}(f) \cap \mathrm{D_y}(f)$ obie granice w (1.37) i (1.38) istnieją i

(1.40) $$\partial_{\mathrm{x}} f(z) = \partial f(z) + \bar{\partial} f(z) \quad \text{oraz} \quad \partial_{\mathrm{y}} f(z) = \mathrm{i}(\partial f(z) - \bar{\partial} f(z)).$$

Ze wzorów (1.39) wynika również, że

(1.41) $$\partial \bar{f}(z) = \overline{\bar{\partial} f}(z) \quad \text{oraz} \quad \bar{\partial} \bar{f}(z) = \overline{\partial f}(z), \quad z \in \mathrm{D_x}(f) \cap \mathrm{D_y}(f).$$

W dalszym ciągu tego podrozdziału stale zakładamy, że Ω jest obszarem niepustym i dla dowolnej funkcji $f : \Omega \to \mathbb{C}$,

(1.42) $$\tilde{f} := \ell^{-1} \circ f \circ \ell : \ell^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}^2,$$

gdzie ℓ jest odwzorowaniem określonym wzorem (1.15). Za pomocą odwzorowania ℓ indukujemy na zbiór $\mathbb{C}$, σ-ciało zbiorów Lebesgue'a w $\mathbb{R}^2$ i dwuwymiarową miarę Lebesgue'a μ_2 w standardowy sposób:

(1.43) $$\mathcal{M}_\ell := \{A \in 2^{\mathbb{C}} : \ell^{-1}(A) \in \mathcal{M}_2\}$$

oraz

(1.44) $$\mathcal{M}_\ell \ni A \mapsto \mu_\ell(A) := \mu_2(\ell^{-1}(A));$$

por. np. [19, Rozdz. V, §4].

Lemat 1.12. *Dla dowolnych $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z \in \Omega$ zachodzą równości:*

(1.45) $$\mathrm{D_x}(f) = \ell(\mathrm{D_1}(\tilde{f})) \quad i \quad \mathrm{D_y}(f) = \ell(\mathrm{D_2}(\tilde{f}))$$

oraz

(1.46) $$\partial_{\mathrm{x}} f(z) = \ell \circ \partial_{|1} \tilde{f} \circ \ell^{-1}(z) \quad i \quad \partial_{\mathrm{y}} f(z) = \ell \circ \partial_{|2} \tilde{f} \circ \ell^{-1}(z).$$

Dowód. Ustalając dowolnie funkcję $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z \in \Omega$ widzimy, że dla każdego $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jeśli $z + t \in \Omega$ to

$$\begin{aligned}\frac{f(z+t) - f(z)}{t} &= \frac{\ell \circ \tilde{f}(\ell^{-1}(z+t)) - \ell \circ \tilde{f}(\ell^{-1}(z))}{t} \\ &= \frac{\ell \circ \tilde{f}(\ell^{-1}(z) + te_1) - \ell \circ \tilde{f}(\ell^{-1}(z))}{t} \\ &= \ell\left(\frac{\tilde{f}(\ell^{-1}(z) + te_1) - \tilde{f}(\ell^{-1}(z))}{t}\right)\end{aligned}$$

oraz jeśli $z + \mathrm{i}t \in \Omega$ to

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\mathrm{i}t)-f(z)}{t} &= \frac{\ell\circ\tilde f(\ell^{-1}(z+\mathrm{i}t)) - \ell\circ\tilde f(\ell^{-1}(z))}{t}\\ &= \frac{\ell\circ\tilde f(\ell^{-1}(z)+te_2) - \ell\circ\tilde f(\ell^{-1}(z))}{t}\\ &= \ell\biggl(\frac{\tilde f(\ell^{-1}(z)+te_2) - \tilde f(\ell^{-1}(z))}{t}\biggr).\end{aligned}$$

Porównując wzory (1.37) i (1.38) ze wzorem (1.27) otrzymujemy na mocy wzoru (1.16) równości (1.45) i (1.46), co kończy dowód. □

Lemat 1.13. *Dla dowolnych $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z \in \Omega$,*

$$\mathrm{J}[f](z) := \mathrm{J}[\tilde f](\ell^{-1}(z)) = |\partial f(z)|^2 - |\bar\partial f(z)|^2. \tag{1.47}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z \in \Omega$. Ze wzorów (1.34) i (1.28) wynika, że

$$\mathrm{J}[\tilde f](\ell^{-1}(z)) = \det\begin{bmatrix}\langle\partial_{|1}\tilde f(x)|e_1\rangle_2 & \langle\partial_{|1}\tilde f(x)|e_2\rangle_2\\ \langle\partial_{|2}\tilde f(x)|e_1\rangle_2 & \langle\partial_{|2}\tilde f(x)|e_2\rangle_2\end{bmatrix},$$

gdzie $x := \ell^{-1}(z)$. Stąd na mocy lematu 1.12,

$$\begin{aligned}\mathrm{J}[\tilde f](\ell^{-1}(z)) &= \det\begin{bmatrix}\langle\ell^{-1}\circ\partial_{\mathrm{x}} f(z)|e_1\rangle_2 & \langle\ell^{-1}\circ\partial_{\mathrm{x}} f(z)|e_2\rangle_2\\ \langle\ell^{-1}\circ\partial_{\mathrm{y}} f(z)|e_1\rangle_2 & \langle\ell^{-1}\circ\partial_{\mathrm{y}} f(z)|e_2\rangle_2\end{bmatrix}\\ &= \det\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,\partial_{\mathrm{x}} f(z) & \mathrm{Im}\,\partial_{\mathrm{x}} f(z)\\ \mathrm{Re}\,\partial_{\mathrm{y}} f(z) & \mathrm{Im}\,\partial_{\mathrm{y}} f(z)\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\Bigl[\Bigl(\partial_{\mathrm{x}} f(z) + \overline{\partial_{\mathrm{x}} f(z)}\Bigr)\Bigl(\partial_{\mathrm{y}} f(z) - \overline{\partial_{\mathrm{y}} f(z)}\Bigr)\\ &\qquad - \Bigl(\partial_{\mathrm{y}} f(z) + \overline{\partial_{\mathrm{y}} f(z)}\Bigr)\Bigl(\partial_{\mathrm{x}} f(z) - \overline{\partial_{\mathrm{x}} f(z)}\Bigr)\Bigr]\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\Bigl[\overline{\partial_{\mathrm{x}} f(z)}\partial_{\mathrm{y}} f(z) - \partial_{\mathrm{x}} f(z)\overline{\partial_{\mathrm{y}} f(z)}\Bigr].\end{aligned}\tag{1.48}$$

Stosując teraz równości (1.40) dostajemy

$$\begin{aligned}\mathrm{J}[\tilde f](\ell^{-1}(z)) &= \frac{1}{2}\Bigl[(\overline{\partial f(z)} + \overline{\bar\partial f(z)})(\partial f(z) - \bar\partial f(z))\\ &\qquad + (\partial f(z) + \bar\partial f(z))(\overline{\partial f(z)} - \overline{\bar\partial f(z)})\Bigr]\\ &= \overline{\partial f(z)}\partial f(z) - \overline{\bar\partial f(z)}\bar\partial f(z)\\ &= |\partial f(z)|^2 - |\bar\partial f(z)|^2,\end{aligned}$$

czego należało dowieść. □

Lemat 1.14. *Dla dowolnych $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z \in \Omega$ zachodzą następujące równości:*

$$|\tilde{f}'(\ell^{-1}(z))|_+ = |\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|; \tag{1.49}$$

$$|\tilde{f}'(\ell^{-1}(z))|_- = \Big||\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|\Big|. \tag{1.50}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z \in \Omega$. Ze wzoru (1.29) wynika, że

$$\nabla_x \tilde{f}(\ell^{-1}(h)) = \sum_{l=1}^{2} \Big(\sum_{k=1}^{2} \langle \partial_{|k} \tilde{f}(x) | e_l \rangle_2 \langle \ell^{-1}(h) | e_k \rangle_2 \Big) e_l, \quad h \in \mathbb{C},$$

gdzie $x := \ell^{-1}(z)$. Stąd na mocy lematu 1.12,

$$\begin{aligned}\nabla_x \tilde{f}(\ell^{-1}(h)) &= \sum_{l=1}^{2} \Big(\langle \ell^{-1} \circ \partial_{\mathrm{x}} f(z) | e_l \rangle_2 \langle \ell^{-1}(h) | e_1 \rangle_2 + \langle \ell^{-1} \circ \partial_{\mathrm{y}} f(z) | e_l \rangle_2 \langle \ell^{-1}(h) | e_2 \rangle_2 \Big) e_l \\ &= (\operatorname{Re} \partial_{\mathrm{x}} f(z) \operatorname{Re} h + \operatorname{Re} \partial_{\mathrm{y}} f(z) \operatorname{Im} h) e_1 \\ &\quad + (\operatorname{Im} \partial_{\mathrm{x}} f(z) \operatorname{Re} h + \operatorname{Im} \partial_{\mathrm{y}} f(z) \operatorname{Im} h) e_2,\end{aligned}$$

co wobec równości (1.40) daje

$$\begin{aligned}\ell\Big(\nabla_x \tilde{f}(\ell^{-1}(h))\Big) &= (\operatorname{Re} \partial_{\mathrm{x}} f(z) \operatorname{Re} h + \operatorname{Re} \partial_{\mathrm{y}} f(z) \operatorname{Im} h) \\ &\quad + \mathrm{i}(\operatorname{Im} \partial_{\mathrm{x}} f(z) \operatorname{Re} h + \operatorname{Im} \partial_{\mathrm{y}} f(z) \operatorname{Im} h) \\ &= \partial_{\mathrm{x}} f(z) \operatorname{Re} h + \partial_{\mathrm{y}} f(z) \operatorname{Im} h \\ &= \Big(\partial f(z) + \bar{\partial} f(z)\Big) \operatorname{Re} h + \mathrm{i}\Big(\partial f(z) - \bar{\partial} f(z)\Big) \operatorname{Im} h \\ &= \partial f(z) h + \bar{\partial} f(z) \overline{h}.\end{aligned}$$

Stąd na mocy wzoru (1.17) i równości (1.32) dostajemy

$$\begin{aligned}|\tilde{f}'(x)|_+ &= \max\Big(\{|\nabla_x \tilde{f}(h)|_2 : h \in \mathbb{R}^2 \wedge |h|_2 = 1\}\Big) \\ &= \max\Big(\{|\ell\Big(\nabla_x \tilde{f}(\ell^{-1}(h))\Big)| : h \in \mathbb{C} \wedge |h| = 1\}\Big) \\ &= \max\Big(\{|\partial f(z) h + \bar{\partial} f(z) \overline{h}| : h \in \mathbb{C} \wedge |h| = 1\}\Big),\end{aligned} \tag{1.51}$$

i podobnie, korzystając z równości (1.33), mamy

$$|\tilde{f}'(x)|_- = \min\Big(\{|\partial f(z) h + \bar{\partial} f(z) \overline{h}| : h \in \mathbb{C} \wedge |h| = 1\}\Big). \tag{1.52}$$

Istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $\partial f(z) = |\partial f(z)| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ i $\bar{\partial} f(z) = |\bar{\partial} f(z)| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$. Przyjmując $h_1 := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta-\alpha}{2}}$ i $h_2 := \mathrm{i} h_1$ dostajemy

$$\begin{aligned}|\partial f(z) h_1 + \bar{\partial} f(z) \overline{h_1}| &= \Big| |\partial f(z)| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta-\alpha}{2}} + |\bar{\partial} f(z)| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta-\alpha}{2}}} \Big| \\ &= \Big| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}} \Big(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|\Big) \Big| \\ &= |\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}|\partial f(z)h_2+\bar\partial f(z)\overline{h_2}| &= \left||\partial f(z)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta-\alpha}{2}}+|\bar\partial f(z)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\overline{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta-\alpha}{2}}}\right|\\ &= \left|\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}\Big(|\partial f(z)|-|\bar\partial f(z)|\Big)\right|\\ &= \Big||\partial f(z)|-|\bar\partial f(z)|\Big|.\end{aligned}$$

Z drugiej strony, dla każdego $h\in\mathbb{C}$, jeśli $|h|=1$ to

$$|\partial f(z)h+\bar\partial f(z)\overline{h}|\leqslant|\partial f(z)h|+|\bar\partial f(z)\overline{h}|=|\partial f(z)|+|\bar\partial f(z)|$$

oraz

$$|\partial f(z)h+\bar\partial f(z)\overline{h}|\geqslant\Big||\partial f(z)h|-|\bar\partial f(z)\overline{h}|\Big|=\Big||\partial f(z)|-|\bar\partial f(z)|\Big|.$$

To łącznie z (1.51) i (1.52) daje odpowiednio równości (1.49) i (1.50), co kończy dowód. □

Twierdzenie 1.15. *Dla dowolnych $f:\Omega\to\mathbb{C}$ i $K\in[1;+\infty)$, $f\in\mathrm{QR}(\Omega;K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia następujące warunki:*

(i) *f jest ciągła;*

(ii) *$f\in\mathrm{ACL}(\Omega;\mathrm{E}(\mathbb{C}))$;*

(iii) $\dfrac{1}{K}(|\partial f(z)|+|\bar\partial f(z)|)^2\leqslant\mathrm{J}[f](z)\leqslant K(|\partial f(z)|-|\bar\partial f(z)|)^2$ *dla μ_ℓ-p.w. $z\in\Omega$;*

(iv) $\int_E(|\partial f|^2+|\bar\partial f|^2)\mathrm{d}\mu_\ell<+\infty$ *dla każdego zbioru zwartego $E\subset\Omega$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie funkcję $f:\Omega\to\mathbb{C}$. Ponieważ ℓ jest izometrią przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ na przestrzeń $\mathrm{E}(\mathbb{C})$, więc

$$f \text{ jest funkcją ciągłą} \Leftrightarrow \tilde f \text{ jest funkcją ciągłą w } \mathrm{E}(\mathbb{R}^2). \tag{1.53}$$

Ponadto na mocy definicji 1.2,

$$f\in\mathrm{ACL}(\Omega;\mathrm{E}(\mathbb{C}))\Leftrightarrow\tilde f\in\mathrm{ACL}(\ell^{-1}(\Omega);\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)). \tag{1.54}$$

Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą. Wtedy $\tilde f$ jest funkcją ciągłą w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$, i w konsekwencji wszystkie funkcje $\ell^{-1}(\Omega)\ni x\mapsto\langle\partial_{|k}\tilde f(x)|e_l\rangle_2\in\mathbb{R}$ są borelowskie dla $k,l\in\mathbb{Z}_{1,2}$, a więc i mierzalne względem σ-ciała $\mathcal{M}_2$; por. uwaga 1.4. Ponieważ dla każdego $x\in\ell^{-1}(\Omega)$,

$$\sum_{l=1}^{2}\langle\partial_{|k}\tilde f(x)|e_l\rangle_2^2=|\partial_{|k}\tilde f(x)|_2^2,\quad k\in\mathbb{Z}_{1,2},$$

więc funkcje $\ell^{-1}(\Omega) \ni x \mapsto |\partial_{|k}\tilde{f}(x)|_2^2 \in \mathbb{R}$ są również mierzalne względem σ-ciała $\mathcal{M}_2$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,2}$. Z lematu 1.12 wynika ponadto, że dla każdego $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |\partial_{|1}\tilde{f}(\ell^{-1}(z))|_2 &= |\ell \circ \partial_{|1}\tilde{f}(\ell^{-1}(z))| = |\partial_{\mathrm{x}} f(z)| \\ |\partial_{|2}\tilde{f}(\ell^{-1}(z))|_2 &= |\ell \circ \partial_{|2}\tilde{f}(\ell^{-1}(z))| = |\partial_{\mathrm{y}} f(z)|. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Dlatego na mocy wzoru (1.43) funkcje $\Omega \ni z \mapsto |\partial_{\mathrm{x}} f(z)|$ i $\Omega \ni z \mapsto |\partial_{\mathrm{y}} f(z)|$ są mierzalne względem σ-ciała $\mathcal{M}_\ell$. Ponadto ze wzorów (1.39) wynika równość

$$|\partial f|^2 + |\bar{\partial} f|^2 = \frac{1}{2}(|\partial_{\mathrm{x}} f|^2 + |\partial_{\mathrm{y}} f|^2) \quad \text{na } \Omega. \tag{1.56}$$

Całkując przez podstawianie ([3, Theorem 1.6.12], [30, Rozdz. VII, §5]) widzimy, że dla każdego zbioru $E \subset \Omega$, jeśli $E \in \mathcal{M}_\ell$ to na mocy równości (1.55) i (1.56) oraz wzorów (1.43) i (1.44),

$$\begin{aligned} 2\int_E \Big(|\partial f|^2 + |\bar{\partial} f|^2\Big) \mathrm{d}\mu_\ell &= \int_E \Big(|\partial_{\mathrm{x}} f|^2 + |\partial_{\mathrm{y}} f|^2\Big) \mathrm{d}\mu_\ell \\ &= \int_E \Big(|\partial_{|1}\tilde{f} \circ \ell^{-1}|_2^2 + |\partial_{|2}\tilde{f} \circ \ell^{-1}|_2^2\Big) \mathrm{d}\mu_\ell \\ &= \int_{\ell^{-1}(E)} \Big(|\partial_{|1}\tilde{f}|_2^2 + |\partial_{|2}\tilde{f}|_2^2\Big) \mathrm{d}\mu_2. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Ponieważ ℓ jest izometrią przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ na przestrzeń $\mathrm{E}(\mathbb{C})$, więc zbiór E jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\ell^{-1}(E)$ jest zwarty w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$. To łącznie z równością (1.57) daje równoważność

$$\int_E \Big(|\partial f|^2 + |\bar{\partial} f|^2\Big) \mathrm{d}\mu_\ell < +\infty \quad \text{dla każdego zbioru zwartego } E \subset \Omega \tag{1.58}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_E \Big(|\partial_{|1}\tilde{f}|_2^2 + |\partial_{|2}\tilde{f}|_2^2\Big) \mathrm{d}\mu_2 < +\infty \quad \text{dla każdego zbioru zwartego } E \subset \ell^{-1}(\Omega) \text{ w przestrzeni } \mathrm{E}(\mathbb{R}^2). \tag{1.59}$$

Niech $K \in [1; +\infty)$ będzie dowolnie zadane. Z lematów 1.13 i 1.14 wynika, że dla każdego $z \in \Omega$,

$$\frac{1}{K}|\tilde{f}'(\ell^{-1}(z))|_+^2 \leqslant \mathrm{J}[\tilde{f}](\ell^{-1}(z)) \leqslant K|\tilde{f}'(\ell^{-1}(z))|_-^2$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{K}(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|)^2 \leqslant \mathrm{J}[f](z) \leqslant K(|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|)^2.$$

Ta równoważność wraz z równoważnościami (1.53), (1.54) i (1.58) $\Leftrightarrow$ (1.59) oznacza, że dla wszystkich $K \in [1; +\infty)$ i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ warunki (i)–(iv) twierdzenia 1.15 są równoważne odpowiednio warunkom (i)–(iv) definicji 1.5 z $f := \tilde{f}$ i $p := 2$. Stąd wobec definicji 1.10 wynika twierdzenie, co kończy dowód. □

Warunek (iii) w twierdzeniu 1.15 można uprościć korzystając z następującego lematu.

Lemat 1.16. *Dla każdej funkcji $f \in \mathrm{QR}(\Omega)$ różnej od funkcji stałej, $|\partial f(z)| > 0$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$.*

Dowód. Ustalając dowolnie funkcję $f \in \mathrm{QR}(\Omega)$ różną od funkcji stałej widzimy na mocy definicji 1.10, że $\tilde{f} : \ell^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}^2$ jest odwzorowaniem quasiregularnym w $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ różnym od funkcji stałej. Z twierdzenia 1.9 wynika, że $\mathrm{J}[\tilde{f}](x) > 0$ dla μ_2-p.w. $x \in \ell^{-1}(\Omega)$. Stąd na mocy lematu 1.13, $|\partial f(z)|^2 - |\bar{\partial} f(z)|^2 > 0$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$. Dlatego $|\partial f(z)| > 0$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$, co dowodzi lematu. □

Wniosek 1.17. *Dla dowolnych $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $K \in [1; +\infty)$, $f \in \mathrm{QR}(\Omega; K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia następujące warunki:*

(i) *f jest ciągła;*

(ii) *$f \in \mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$;*

(iii) *$(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|) \leqslant K(|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|)$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$;*

(iv) *$\int_E (|\partial f|^2 + |\bar{\partial} f|^2) \mathrm{d}\mu_\ell < +\infty$ dla każdego zbioru zwartego $E \subset \Omega$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $K \in [1; +\infty)$. Zauważmy, że jeśli f jest funkcją stałą to spełnia ona w oczywisty sposób warunki (i)–(iv) wniosku i twierdzenia 1.15. Możemy więc założyć, że $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nie jest funkcją stałą. Ustalmy dowolnie $f \in \mathrm{QR}(\Omega; K)$. Stosując twierdzenie 1.15 stwierdzamy na mocy warunku (iii) tego twierdzenia oraz lematu 1.13, że dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$,

$$\frac{1}{K}(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|)^2 \leqslant \mathrm{J}[f](z) = |\partial f(z)|^2 - |\bar{\partial} f(z)|^2. \tag{1.60}$$

Z lematu 1.16 wynika, że $|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)| > 0$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$. Dzieląc więc obie strony nierówności (1.60) przez $|\partial f(z)|+|\bar{\partial} f(z)|$, gdy $z \in \Omega$ spełnia ostatnią nierówność, otrzymujemy warunek (iii). Pozostałe warunki (i), (ii) i (iv) wniosku i twierdzenia 1.15 pokrywają się, co dowodzi wniosku w stronę ($\Rightarrow$).

Na odwrót, załóżmy, że funkcja f spełnia wszystkie warunki wniosku. Z warunku (iii) wnioskujemy na mocy lematu 1.13, że dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned}(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|)^2 &\leqslant K(|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|)(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|)\\ &= K(|\partial f(z)|^2 - |\bar{\partial} f(z)|^2) = K\,\mathrm{J}[f](z)\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathrm{J}[f](z) &= |\partial f(z)|^2 - |\bar{\partial} f(z)|^2 = (|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|)(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|)\\ &\leqslant K(|\partial f(z)| - |\bar{\partial} f(z)|)^2.\end{aligned}$$

Dlatego zachodzi warunek (iii) twierdzenia 1.15. Pozostałe warunki (i), (ii) i (iv) wniosku i twierdzenia 1.15 pokrywają się, a więc funkcja f spełnia wszystkie warunki twierdzenia 1.15. Dlatego $f \in \mathrm{QR}(\Omega; K)$, co dowodzi wniosku w stronę ($\Leftarrow$).

Obie implikacje dają łącznie równoważność, co kończy dowód. □

Uwaga 1.18. Klasa $\mathrm{QR}(\Omega)$ jest rozszerzeniem klasy $\mathrm{Hol}(\Omega)$ wszystkich funkcji holomorficznych w obszarze Ω. Zauważmy bowiem, że funkcja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna, gdy spełnia następujące warunki:

(i) f jest ciągła;

(ii) $f \in \mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$;

(iii) $\bar{\partial} f(z) = 0$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$;

(iv) $\int_E (|\partial f| + |\bar{\partial} f|) \mathrm{d}\mu_\ell < +\infty$ dla każdego zbioru zwartego $E \subset \Omega$.

W celu wykazania tej własności ustalmy dowolnie $a \in \Omega$. Istnieje wówczas $R \in \mathbb{R}_+$ taki, że $\mathbb{D}(a, 2R) \subset \Omega$. Z warunków (i), (ii) i (iv) wynika na mocy [18, Lemma 7.1, p. 155], że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} \mathrm{d}u - \frac{1}{\pi} \lim_{r \to 0^+} \int_{\mathbb{D}(a,R) \setminus \mathbb{D}(z,r)} \frac{\bar{\partial} f(u)}{u - z} \mathrm{d}\mu_\ell, \quad z \in \mathbb{D}(a, R),$$

gdzie $[0; 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(t) := a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Uwzględniając teraz warunek (iii) dostajemy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} \mathrm{d}u, \quad z \in \mathbb{D}(a, R).$$

Stąd $f|_{\mathbb{D}(a,R)} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}(a, R))$, i z uwagi na dowolność wyboru $a \in \Omega$, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Z powyższej własności wynika ważny związek pomiędzy odwzorowaniami quasiregularnymi a funkcjami holomorficznymi w obszarze Ω wyrażony przez równość

$$\mathrm{QR}(\Omega; 1) = \mathrm{Hol}(\Omega). \tag{1.61}$$

Innymi słowy każda funkcja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną wtedy i tylko wtedy, gdy jest odwzorowaniem 1-quasiregularnym płaszczyzny zespolonej. Wynik ten pochodzi od Weyla przy dodatkowym założeniu, że funkcja f jest homeomorfizmem;

por. [34, Theorem 1.14], [1, Chap. V, Sec. B]. Przedstawimy pokrótce dowód równości (1.61) wychodząc z definicji 1.11 i twierdzenia 1.15.

Ustalmy dowolnie $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Uwzględniając standardowe własności funkcji holomorficznych widzimy, że f spełnia warunki (i), (ii) i (iv) wniosku 1.17. Ponadto f spełnia równania Cauchy-Riemanna

$$\partial_{\mathrm{x}} \operatorname{Re} f(z) = \partial_{\mathrm{y}} \operatorname{Im} f(z) \ \text{ i } \ \partial_{\mathrm{y}} \operatorname{Re} f(z) = -\partial_{\mathrm{x}} \operatorname{Im} f(z), \quad z \in \Omega,$$

które z uwagi na wzory (1.39) można wyrazić krótko $\bar{\partial} f(z) = 0$ dla $z \in \Omega$. W konsekwencji warunek (iii) wniosku 1.17 zachodzi ze stałą $K := 1$. Dlatego $f \in \mathrm{QR}(\Omega; 1)$, co dowodzi inkluzji $\mathrm{Hol}(\Omega) \subset \mathrm{QR}(\Omega; 1)$. Na odwrót, ustalmy dowolnie $f \in \mathrm{QR}(\Omega; 1)$. Korzystając ponownie z wniosku 1.17 stwierdzamy, że zachodzą warunki (i) i (ii). Ponadto, z warunków (iii) i (iv) wniosku 1.17 wynikają warunki (iii) i (iv). Dlatego $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, co prowadzi do inkluzji $\mathrm{QR}(\Omega; 1) \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$, która wraz z wykazaną już inkluzją przeciwną daje równość (1.61).

Uwaga 1.19. Z wniosku 1.17 wynika, że złożenie funkcji holomorficznej z odwzorowaniem quasiregularnym jest odwzorowaniem quasiregularnym. Dokładniej rzecz ujmując, dla dowolnych $K \in [1; +\infty)$, $f \in \mathrm{QR}(\Omega; K)$, obszaru Ω' i $g \in \mathrm{Hol}(\Omega')$, jeśli $f(\Omega) \subset \Omega'$ to $g \circ f \in \mathrm{QR}(\Omega; K)$. Biorąc bowiem pod uwagę warunek (i) wniosku 1.17 widzimy, że funkcja $g \circ f$ jest ciągła. Ponieważ $g \in \mathrm{Hol}(f(\Omega))$, więc

$$\partial_{\mathrm{x}}(g \circ f)(z) = g'(f(z))\partial_{\mathrm{x}} f(z) \ \text{ i } \ \partial_{\mathrm{y}}(g \circ f)(z) = g'(f(z))\partial_{\mathrm{y}} f(z), \quad z \in \mathrm{D}_{\mathrm{x}}(f) \cap \mathrm{D}_{\mathrm{y}}(f).$$

Stąd na mocy wzorów (1.39)

$$\partial(g \circ f)(z) = g'(f(z))\partial f(z) \ \text{ i } \ \bar{\partial}(g \circ f)(z) = g'(f(z))\bar{\partial} f(z), \qquad z \in \mathrm{D}_{\mathrm{x}}(f) \cap \mathrm{D}_{\mathrm{y}}(f). \tag{1.62}$$

Ponadto dla każdego zbioru zwartego $E \subset \Omega$, $f(E)$ jest zbiorem zwartym, i w konsekwencji $g'(f(E))$ jest zbiorem zwartym. Dlatego

$$M_E := \sup(\{|g'(z)| : z \in f(E)\}) < +\infty, \tag{1.63}$$

dla każdego zbioru zwartego $E \subset \Omega$. Ustalając dowolnie przedział niepusty $[a; b] \subset \Omega$ widzimy, że funkcja f jest jednostajnie ciągła w tym przedziale. Ponieważ $f([a; b])$ jest zwartym podzbiorem obszaru Ω', więc istnieją $n \in \mathbb{N}$ i $\eta \in \mathbb{R}_+$ o tej własności, że

$$f([a_{k,l}; b_{k,l}]) \subset \mathbb{D}(a_{k,l}, \eta) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a_{k,l}, \eta)) \subset \Omega', \quad k, l \in \mathbb{Z}_{1,n}, \tag{1.64}$$

gdzie dla dowolnych $k, l \in \mathbb{Z}_{1,n}$,

$$a_{k,l} := a + \frac{k-1}{n} \operatorname{Re}(b-a) + \mathrm{i}\frac{l-1}{n} \operatorname{Im}(b-a) \ \text{ i } \ b_{k,l} := a + \frac{k}{n} \operatorname{Re}(b-a) + \mathrm{i}\frac{l}{n} \operatorname{Im}(b-a).$$

Na mocy warunku (ii) wniosku 1.17, $f \in \mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$, a więc funkcja f spełnia warunki (i) i (ii) twierdzenia 1.3 dla każdego z przedziałów $[a_{k,l}; b_{k,l}]$. Z (1.63) i (1.64) wynika, że funkcja g spełnia warunek Lipschitza w każdym kole domkniętym $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a_{k,l}, \eta))$. Dlatego dla każdego z przedziałów $[a_{k,l}; b_{k,l}]$ złożenie $g \circ f$ spełnia warunki (i) i (ii) twierdzenia 1.3 w miejsce funkcji f, i tym samym spełnia je dla całego przedziału $[a; b]$. Stosując ponownie twierdzenie 1.3 widzimy, że $g \circ f \in \mathrm{ACL}(\Omega; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$. Wychodząc zaś z warunków (iii) i (iv) wniosku 1.17 stwierdzamy na mocy (1.62) i uwagi 1.4, że odpowiednio:

$$\begin{aligned}(|\partial(g \circ f)(z)| + |\bar\partial(g \circ f)(z)|) &= |g'(f(z))|(|\partial f(z)| + |\bar\partial f(z)|)\\ &\leqslant K|g'(f(z))|(|\partial f(z)| - |\bar\partial f(z)|) = K(|\partial(g \circ f)(z)| - |\bar\partial(g \circ f)(z)|)\end{aligned}$$

dla μ_ℓ-p.w. $z \in \Omega$ oraz dla każdego zbioru zwartego $E \subset \Omega$,

$$\int_E (|\partial(g \circ f)|^2 + |\bar\partial(g \circ f)|^2) \mathrm{d}\mu_\ell \leqslant M_E^2 \int_E (|\partial f|^2 + |\bar\partial f|^2) \mathrm{d}\mu_\ell < +\infty.$$

Zatem złożenie $g \circ f$ spełnia wszystkie warunki (i)–(iv) wniosku 1.17 w miejsce funkcji f, i tym samym $g \circ f \in \mathrm{QR}(\Omega; K)$.

Rozdział 2

Twierdzenia o podniesieniu funkcji ciągłej i różnowartościowej w zbiorze radialnym

W tej części skupimy uwagę na równaniu funkcyjnym

$$e^{i\varphi(z)} = f(e^{iz}), \quad z \in D, \tag{2.1}$$

z funkcją niewiadomą $\varphi : D \to \mathbb{C}$, gdzie D jest zadanym pasem horyzontalnym, zaś $f : D' \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest funkcją zespoloną ciągłą w zbiorze $D' := \{e^{iz} : z \in D\}$. Idąc na skróty, rozwiązanie równania (2.1) często bywa wyrażane w postaci

$$D \ni z \mapsto \varphi(z) = \frac{1}{i} \log\Big(f(e^{iz})\Big), \tag{2.2}$$

gdzie log jest dowolnie zadaną gałęzią funkcji logarytmicznej; por. np. [16, (2.9)]. Jednak interpretacja tego wzoru jako złożenie funkcji logarytmicznej log z funkcją f nie ma sensu, gdy f przyjmuje wartości w zbiorze dwu-spójnym, np. $f(D') = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, gdzie funkcja log jest nieokreślona. Wtedy wzór (2.2) należy traktować lokalnie, czyli w stosownie małych otoczeniach $\mathbb{D}(p, r_p) \cap D$ w miejsce zbioru D, $p \in D$. Stosując twierdzenie o monodromii można, przy pewnych dodatkowych założeniach na funkcję f, wykazać istnienie rozwiązania globalnego równania (2.1); por. np. [13, Remark 3.3], [29, Chap. 16]. Jeśli $D = \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ i f jest homeomorfizmem koła $\mathbb{D}$ na siebie zachowującym punkt 0, to istnienie rozwiązania równania (2.1) wydaje się być faktem dość intuicyjnym. Niemniej jednak, precyzyjny jego dowód wcale nie jest oczywisty. Ponieważ istnienie rozwiązań równania (2.1) i badanie ich własności odgrywa kluczową rolę w tej pracy, więc zagadnienie to zostanie potraktowane z dużą dozą staranności w kolejnych trzech podrozdziałach, opracowanych na podstawie pracy [13].

Przy tym z dowodów lematu [13, Lemma 3.1] i twierdzenia [13, Theorem 3.2] zostały usunięte usterki. W celu wykazania istnienia rozwiązania równania (2.1) (lemat 2.7 i twierdzenie 2.8) odwołujemy się tutaj do klasycznego twierdzenia Eilenberga; por. [9, Théorème 1, p. 75], [17, Chap. XXI, §3].

Ostatni czwarty podrozdział jest poświęcony charakteryzacji geometrycznej odwzorowań quasikonforemnych płaszczyzny zespolonej, gdzie rezultaty z podrozdziału 2.3 zostały wykorzystane do określenia orientacji homeomorfizmu w płaszczyźnie zespolonej.

2.1 Fakty pomocnicze

W celu zapewnienia ogólności rozważań wprowadzamy następujące pojęcie.

Definicja 2.1. Zbiór A nazywamy *zbiorem radialnym* $:\Leftrightarrow A \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz zachodzi następujący warunek

$$z \in A \Rightarrow \mathbb{T}(0, |z|) \subset A, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

W szczególności dla dowolnych $r, R \in \mathbb{R}_+$, pierścień otwarty $\mathbb{D}(0; r, R)$ i pierścień domknięty $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0; r, R))$ są zbiorami radialnymi. Dla dowolnego zbioru radialnego A i dowolnej funkcji ciągłej $f : A \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiujemy klasę $\mathrm{Log}(f)$ złożoną ze wszystkich funkcji ciągłych $\varphi : \mathrm{Ei}(A) \to \mathbb{C}$ spełniających następujący warunek

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z)}, \quad z \in \mathrm{Ei}(A), \tag{2.4}$$

gdzie

$$\mathrm{Ei}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \in A\}. \tag{2.5}$$

W szczególności dla wszystkich $r, R \in \mathbb{R}$, jeżeli $0 < r \leqslant R$, to

$$\mathrm{Ei}(\mathbb{D}(0; r, R)) = \{z \in \mathbb{C} : -\log R < \mathrm{Im}\, z < -\log r\} \tag{2.6}$$

oraz

$$\mathrm{Ei}(\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0; r, R))) = \{z \in \mathbb{C} : -\log R \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant -\log r\}. \tag{2.7}$$

Definicja 2.2. Dla dowolnego zbioru radialnego A oraz funkcji ciągłej $f : A \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ obiekt $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$ nazywamy *reprezentacją wykładniczą funkcji* f.

Lemat 2.3. *Niech A będzie spójnym zbiorem radialnym, $f : A \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ będzie funkcją ciągłą oraz $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$. Wówczas dla każdej funkcji $\psi : B \to \mathbb{C}$, gdzie $B := \mathrm{Ei}(A)$, $\psi \in \mathrm{Log}(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest funkcją ciągłą oraz istnieje $n \in \mathbb{Z}$ taki, że*

$$\psi(z) - \varphi(z) = 2\pi n, \quad z \in B. \tag{2.8}$$

Dowód. Ustalmy A, f i φ spełniające założenia lematu oraz funkcję $\psi : B \to \mathbb{C}$. Załóżmy najpierw, że $\psi \in \operatorname{Log}(f)$. Wówczas

$$e^{i\varphi(z)} = f(e^{iz}) = e^{i\psi(z)}, \quad z \in B,$$

i w konsekwencji

$$e^{i(\psi(z)-\varphi(z))} = e^{i\psi(z)}/e^{i\varphi(z)} = 1, \quad z \in B.$$

Zatem

$$\frac{1}{2\pi}(\psi(z) - \varphi(z)) \in \mathbb{Z}, \quad z \in B. \tag{2.9}$$

Ponieważ funkcje ψ oraz φ są ciągłe w zbiorze spójnym B, więc $\frac{1}{2\pi}(\psi - \varphi)$ jest funkcją stałą, co daje własność (2.8) dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Odwrotnie, załóżmy, że ψ jest funkcją ciągłą spełniającą warunek (2.8) dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas dla każdego $z \in B$,

$$e^{i\psi(z)} = e^{i(\varphi(z)+2\pi n)} = e^{i\varphi(z)}e^{2\pi i n} = e^{i\varphi(z)} = f(e^{iz}),$$

co oznacza, że $\psi \in \operatorname{Log}(f)$. □

Lemat 2.4. *Niech A będzie spójnym zbiorem radialnym oraz niech $p, q \in B := \operatorname{Ei}(A)$. Wówczas dla każdej funkcji ciągłej $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, jeśli $\operatorname{Log}(f) \neq \emptyset$ oraz*

$$f(e^{ip}) = e^{iq}, \tag{2.10}$$

to istnieje dokładnie jedna funkcja $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$ taka, że $\varphi(p) = q$.

Dowód. Ustalmy A, p, q oraz f spełniające założenia lematu. Wówczas istnieje $\tilde{\varphi} \in \operatorname{Log}(f)$, co łącznie z (2.10) daje

$$e^{i\tilde{\varphi}(p)} = f(e^{ip}) = e^{iq}.$$

Stąd $q = \tilde{\varphi}(p) + 2\pi n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Przyjmując $\varphi := \tilde{\varphi} + 2\pi n$ wnioskujemy z lematu 2.3, że $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$ oraz $\varphi(p) = q$. W celu udowodnienia jednoznaczności φ ustalmy dowolnie $\psi \in \operatorname{Log}(f)$ spełniający równość $\psi(p) = q$. Stosując ponownie lemat 2.3 widzimy, że warunek (2.8) zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, i w konsekwencji $\psi - \varphi$ jest funkcją stałą. Zatem

$$\psi(z) - \varphi(z) = \psi(p) - \varphi(p) = q - q = 0, \quad z \in B,$$

a więc $\psi = \varphi$, co kończy dowód. □

Uwaga 2.5. Wiadomo, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ istnieje funkcja ciągła $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca następujący warunek

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Jest to klasyczny wynik z topologii algebraicznej dotyczący grupy podstawowej okręgu jednostkowego; por. np. [11, Chap. 1], [15, Chap. 16]. Ten rezultat jest także bardzo użyteczny w analizie zespolonej; por. np. [8, Sec. 3.3], [23, Sec. 2.1 and 3.1]. Na mocy definicji 2.2, każda funkcja ciągła $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spełniająca warunek (2.11) jest reprezentacją wykładniczą danej funkcji ciągłej $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, co oznacza, że $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$, a więc $\mathrm{Log}(f) \neq \emptyset$. Ponieważ $\mathbb{T}$ jest spójnym zbiorem radialnym, więc lematy 2.3 i 2.4 mają zastosowanie do zbioru $A := \mathbb{T}$. Na mocy wzoru (2.5), $\mathrm{Ei}(A) = \mathbb{R}$, zaś z warunku (2.11) wynika, że $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$. Co więcej, z lematów 2.3 i 2.4 wynika, że istnieje dokładnie jeden $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$ taki, że

$$0 \leqslant \varphi(0) < 2\pi. \tag{2.12}$$

Zatem reprezentacja wykładnicza φ funkcji f jest jednoznacznie wyznaczona przez warunek (2.12).

Lemat 2.6. *Dla dowolnych funkcji ciągłych $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, jeżeli*

$$|f(u) - g(u)| < \sqrt{2}, \quad u \in \mathbb{T}, \tag{2.13}$$

to dla wszystkich $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$ i $\psi \in \mathrm{Log}(g)$ istnieje $n \in \mathbb{Z}$ taki, że

$$\varphi(t) - \psi(t) = \arcsin\left(\mathrm{Im}\,\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right) + 2\pi n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Dowód. Mając dane funkcje ciągłe $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ spełniające warunek (2.13) dostajemy

$$\left|\frac{f(u)}{g(u)} - 1\right| = \frac{|f(u) - g(u)|}{|g(u)|} = |f(u) - g(u)| < \sqrt{2}, \quad u \in \mathbb{T},$$

oraz $f(u)/g(u) \in \mathbb{T}$ dla $u \in \mathbb{T}$. Zatem

$$\mathrm{Re}\,\frac{f(u)}{g(u)} > 0 \quad \text{oraz} \quad \left|\mathrm{Im}\,\frac{f(u)}{g(u)}\right| < 1, \quad u \in \mathbb{T}. \tag{2.15}$$

Rozważmy funkcję

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha(t) := \arcsin\left(\mathrm{Im}\,\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right).$$

Wówczas dla dowolnie ustalonego $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t) \in (-\pi/2; \pi/2)$ oraz

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t)} = \cos(\alpha(t)) + \mathrm{i}\sin(\alpha(t)) = \cos(\alpha(t)) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})},$$

a to implikuje

$$1 = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t)}|^2 = \Big(\cos(\alpha(t))\Big)^2 + \left(\operatorname{Im}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right)^2.$$

Z drugiej strony

$$1 = \left|\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right|^2 = \left(\operatorname{Re}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right)^2.$$

Stąd, korzystając z pierwszej nierówności w (2.15), mamy

$$\operatorname{Re}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = \left|\operatorname{Re}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right| = |\cos(\alpha(t))| = \cos(\alpha(t)).$$

Zatem

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t)} = \cos(\alpha(t)) + \mathrm{i}\sin(\alpha(t)) = \operatorname{Re}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} + \mathrm{i}\operatorname{Im}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = \frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Ponieważ f i g są funkcjami ciągłymi, więc funkcja α jest ciągła, a tym samym dla dowolnie zadanych $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$ i $\psi \in \operatorname{Log}(g)$, funkcja $\beta := \varphi - \psi - \alpha$ jest również ciągła. Z drugiej strony, z (2.16) otrzymujemy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(t)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(t)}}\Big/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t)} = \frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\Big/\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

skąd $\frac{1}{2\pi}\beta(t) \in \mathbb{Z}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Istnieje więc $n \in \mathbb{Z}$ taki, że $\beta(t) = 2\pi n$ dla $t \in \mathbb{R}$, co dowodzi własności (2.14). □

2.2 Twierdzenie o istnieniu reprezentacji wykładniczej funkcji

Głównym celem tego rozdziału jest wykazanie, że $\operatorname{Log}(f) \neq \emptyset$ przy założeniu ciągłości i różnowartościowości funkcji $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ w spójnym zbiorze radialnym A. Zaczniemy od wykazania następującego lematu pomocniczego.

Lemat 2.7. *Niech $r, R \in \mathbb{R}$ i $p, q \in \mathbb{C}$ będą takie, że $0 < r \leqslant R$ i $p, q \in B := \operatorname{Ei}(A)$, gdzie $A := \operatorname{cl}(\mathbb{D}(0; r, R))$. Wtedy dla każdej funkcji ciągłej i różnowartościowej $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spełniającej równość*

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} \tag{2.17}$$

istnieje dokładnie jedna funkcja $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$ spełniająca warunek $\varphi(p) = q$.

Dowód. Ustalmy dowolnie r, R, p, q i f spełniające założenia lematu. Ponieważ A jest zbiorem zwartym, zaś f jest funkcją ciągłą w zbiorze A, więc istnieją $\zeta, \xi \in A$ spełniające następujący warunek

$$|f(\zeta)| \leqslant |f(u)| \leqslant |f(\xi)|, \quad u \in A. \tag{2.18}$$

Dalszą część dowodu rozdzielimy na dwa uzupełniające się przypadki.

Przypadek I, gdy $\{\zeta, \xi\} \cap [r; R] = \emptyset$. Wtedy istnieje zbiór spójny $\Gamma \subset A \setminus [r; R]$ zawierający punkty ζ oraz ξ. Przyjmując

$$E := \{tf(\zeta) : t \in [0; 1]\} \cup f(\Gamma) \cup \{tf(\xi) : t \in [1; +\infty)\} \cup \{\infty\}, \tag{2.19}$$

widzimy, że $0, \infty \in E \subset \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Z ciągłości funkcji f wynika, że obraz $f(\Gamma)$ jest zbiorem spójnym. Ponieważ $f(\zeta), f(\xi) \in f(\Gamma)$, ze wzoru (2.19) wnioskujemy, że E jest zbiorem spójnym w rozszerzonej płaszczyźnie zespolonej $\mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}}) := (\hat{\mathbb{C}}, \rho_\mathrm{c})$, gdzie ρ_c jest metryką cięciwową w $\hat{\mathbb{C}}$. Z różnowartościowości funkcji f mamy $f([r; R]) \cap f(\Gamma) = \emptyset$. To łącznie z (2.18) i (2.19) daje $E \cap f([r; R]) = \emptyset$. Zatem punkty 0 oraz ∞ nie należą do różnych spójnych składowych zbioru $\hat{\mathbb{C}} \setminus f([r; R])$ w przestrzeni $\mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}})$. Ponieważ przedział $[r; R]$ jest zbiorem zwartym oraz odwzorowanie f jest ciągłe, więc $f([r; R])$ jest zbiorem zwartym. Dlatego istnieje funkcja ciągła $L : f([r; R]) \to \mathbb{C}$ spełniająca następujący warunek

$$\mathrm{e}^{L(u)} = u, \quad u \in f([r; R]), \tag{2.20}$$

co jest konsekwencją klasycznego twierdzenia Eilenberga; por. [9, Théorème 1, p. 75], [17, Chap. XXI §3]. Ponieważ $\mathrm{e}^{-t} \in [r; R] \subset A$ dla $t \in I := [-\log R; -\log r]$, więc funkcja

$$I \ni t \mapsto \lambda(t) := \frac{1}{\mathrm{i}}\Big(L(f(\mathrm{e}^{-t})) - \log|f(\mathrm{e}^{-t})|\Big) \tag{2.21}$$

jest dobrze określoną funkcją ciągłą. Dla każdego $y \in I$ funkcja

$$\mathbb{T} \ni u \mapsto f_y(u) := \frac{f(\mathrm{e}^{-y}u)}{|f(\mathrm{e}^{-y}u)|} \tag{2.22}$$

jest ciągła i $f_y(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Z uwagi 2.5 wynika, że dla dowolnie ustalonego $y \in I$ istnieje $\tilde{\varphi}_y \in \mathrm{Log}(f_y)$. Wówczas $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\varphi}_y(0)} = f_y(1)$. Z drugiej strony, łącząc (2.21) z (2.20) dostajemy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(y)} = \mathrm{e}^{L(f(\mathrm{e}^{-y})) - \log|f(\mathrm{e}^{-y})|} = \frac{f(\mathrm{e}^{-y})}{|f(\mathrm{e}^{-y})|} = f_y(1).$$

Zatem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\varphi}_y(0)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(y)}$ dla $y \in I$, a więc istnieje funkcja $\mu : I \to \mathbb{Z}$ taka, że $\tilde{\varphi}_y(0) - \lambda(y) = 2\pi\mu(y)$ dla $y \in I$. Przyjmując teraz

$$\varphi_y := \tilde{\varphi}_y - 2\pi\mu(y), \quad y \in I, \tag{2.23}$$

otrzymujemy

$$\varphi_y(0) = \lambda(y), \quad y \in I. \tag{2.24}$$

Z lematu 2.3 wynika, że $\varphi_y \in \operatorname{Log}(f_y)$ dla $y \in I$. Ze wzoru (2.22) dostajemy

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}) &= f(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = f_y(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|f(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_y(x)}\mathrm{e}^{\log|f(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_y(x)-\mathrm{i}\log|f(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})|)}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in I. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Skupimy się teraz na pokazaniu, że funkcja

$$B \ni x+\mathrm{i}y \mapsto \psi(x+\mathrm{i}y) := \varphi_y(x) - \mathrm{i}\log|f(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| \tag{2.26}$$

jest ciągła. Z uwagi na ciągłość funkcji $B \ni z \mapsto \log|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})|$ wystarczy pokazać, że funkcja $B \ni x+\mathrm{i}y \mapsto \varphi_y(x)$ jest również ciągła. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, $0 \notin f(A)$ i A jest zbiorem zwartym, więc $f/|f|$ jest funkcją jednostajnie ciągłą. Stąd dla dowolnie ustalonego $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ istnieje $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$ o tej własności, że

$$|u-v| < \delta_0 \Rightarrow \left|\frac{f(u)}{|f(u)|} - \frac{f(v)}{|f(v)|}\right| < \min(\{\varepsilon, \sqrt{2}\}), \quad u,v \in A. \tag{2.27}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $I \ni t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ mamy

$$|\mathrm{e}^{-t_1} - \mathrm{e}^{-t_2}| \leqslant \sup_{t\in I}|-\mathrm{e}^{-t}|\cdot|t_1-t_2| \leqslant R|t_1-t_2|, \quad t_1,t_2 \in I,$$

gdyż $-t \leqslant \log R$ dla $t \in I$. Ponieważ λ jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym I, więc λ jest jednostajnie ciągła na I. Zatem istnieje $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$ o tej własności, że

$$|t_1-t_2| < \delta_1 \Rightarrow |\lambda(t_1)-\lambda(t_2)| < 1, \quad t_1,t_2 \in I. \tag{2.28}$$

Ustalając dowolnie $y_1, y_2 \in I$ załóżmy, że $|y_1-y_2| < \delta_2 := \min(\{\delta_0/R, \delta_1\})$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-y_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \in A$, $\mathrm{e}^{-y_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \in A$ oraz

$$|\mathrm{e}^{-y_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-y_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|\cdot|\mathrm{e}^{-y_1}-\mathrm{e}^{-y_2}| < \delta_0.$$

Łącząc ten fakt z (2.27) dostajemy na mocy wzoru (2.22),

$$|f_{y_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) - f_{y_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| < \sqrt{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stąd na mocy lematu 2.6 wynika istnienie $n \in \mathbb{Z}$ takiego, że

$$\varphi_{y_1}(x) - \varphi_{y_2}(x) = \arcsin\left(\operatorname{Im}\frac{f_{y_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{f_{y_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\right) + 2\pi n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

W szczególności, dla $x := 0$ wnioskujemy z (2.24), że

$$2\pi|n| \leqslant |\lambda(y_1) - \lambda(y_2)| + \left|\arcsin\left(\operatorname{Im}\frac{f_{y_1}(1)}{f_{y_2}(1)}\right)\right|,$$

skąd na mocy (2.28),

$$|n| < \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2} < 1.$$

Dlatego $n = 0$, co łącznie z (2.29) daje

$$|y_1 - y_2| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi_{y_1}(x) - \varphi_{y_2}(x)| = \left|\arcsin\left(\operatorname{Im}\frac{f_{y_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{f_{y_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\right)\right|, \qquad x \in \mathbb{R},\ y_1, y_2 \in I. \tag{2.30}$$

Ustalmy $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in B$. Wówczas dla dowolnie zadanych $x \in \mathbb{R}$ oraz $y \in I$, $u := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} \in A$ i $v := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y_0)} \in A$. Korzystając z warunku (2.27) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Im}\frac{f_y(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{f_{y_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\right| &= \left|\operatorname{Im}\left(\frac{f_y(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{f_{y_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})} - 1\right)\right| \\ &\leqslant \left|\frac{f_y(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{f_{y_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})} - 1\right| \\ &= \left|\frac{f(u)}{|f(u)|}\Big/\frac{f(v)}{|f(v)|} - 1\right| \\ &= \left|\frac{f(u)}{|f(u)|} - \frac{f(v)}{|f(v)|}\right| < \varepsilon,\end{aligned}$$

przy założeniu, że $|y - y_0| < \delta_2$. Stąd i z warunku (2.30) mamy

$$\begin{aligned}|\varphi_y(x) - \varphi_{y_0}(x_0)| &\leqslant |\varphi_y(x) - \varphi_{y_0}(x)| + |\varphi_{y_0}(x) - \varphi_{y_0}(x_0)| \\ &\leqslant \left|\arcsin\left(\operatorname{Im}\frac{f_y(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{f_{y_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\right)\right| + |\varphi_{y_0}(x) - \varphi_{y_0}(x_0)| \\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\varepsilon + |\varphi_{y_0}(x) - \varphi_{y_0}(x_0)|,\end{aligned}$$

gdy $|y - y_0| < \delta_2$. Ponieważ funkcja φ_{y_0} jest ciągła, więc istnieje $\delta_3 \in \mathbb{R}_+$ taki, że

$$|x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |\varphi_{y_0}(x) - \varphi_{y_0}(x_0)| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Przyjmując zatem $\delta := \min(\{\delta_2, \delta_3\})$ dostajemy

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |\varphi_y(x) - \varphi_{y_0}(x_0)| < 3\varepsilon, \quad z := x + \mathrm{i}y \in B,$$

a więc funkcja $B \ni x + \mathrm{i}y \mapsto \varphi_y(x)$ jest ciągła w każdym punkcie $z_0 \in B$. Dlatego funkcja ψ określona wzorem (2.26) jest ciągła. To łącznie z (2.25) i (2.26) oznacza, że

$\psi \in \mathrm{Log}(f)$, czyli $\mathrm{Log}(f) \neq \emptyset$.

Przypadek II, gdy $\{\zeta, \xi\} \cap [r; R] \neq \emptyset$. Wówczas istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ o tej własności, że $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\zeta, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\xi\} \cap [r; R] = \emptyset$. Przyjmując

$$A \ni u \mapsto \tilde{f}(u) := f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}u) \tag{2.31}$$

widzimy, że $\tilde{f} : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest funkcją ciągłą i różnowartościową. Z (2.18) mamy

$$|\tilde{f}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\zeta)| \leqslant |f(u)| \leqslant |\tilde{f}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\xi)|, \quad u \in A,$$

co daje

$$|\tilde{f}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\zeta)| \leqslant |\tilde{f}(u)| \leqslant |\tilde{f}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\xi)|, \quad u \in A.$$

W ten sposób możemy się odwołać do udowodnionego już pierwszego przypadku z f, ζ i ξ zastąpionymi odpowiednio przez $\tilde{f}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\zeta$ i $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\xi$. W rezultacie istnieje $\tilde{\psi} \in \mathrm{Log}(\tilde{f})$. Stosując wzór (2.31) widzimy, że dla każdego $z \in B$,

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = \tilde{f}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+\alpha)}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\psi}(z+\alpha)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(z)},$$

gdzie $B \ni z \mapsto \psi(z) := \tilde{\psi}(z + \alpha)$. Stąd $\psi \in \mathrm{Log}(f)$, gdyż $\tilde{\psi}$ jest funkcją ciągłą.

Zatem w obu przypadkach $\mathrm{Log}(f) \neq \emptyset$. Co więcej, z założenia (2.17) wynika, że zachodzi warunek (2.10). Z lematu 2.4 wynika zaś, że istnieje dokładnie jedna funkcja $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$ spełniająca równość $\varphi(p) = q$, co kończy dowód. □

Następujące twierdzenie rozszerza lemat 2.7 na przypadek dowolnego spójnego zbioru radialnego.

Twierdzenie 2.8. *Niech A będzie spójnym zbiorem radialnym oraz niech $p, q \in B := \mathrm{Ei}(A)$. Wtedy dla każdej funkcji ciągłej i różnowartościowej $f : A \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ spełniającej warunek* (2.17) *istnieje dokładnie jedna funkcja $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$ taka, że $\varphi(p) = q$.*

Dowód. Niech A będzie dowolnie ustalonym spójnym zbiorem radialnym. Jeśli $A = \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0; r, R))$ dla pewnych $r, R \in \mathbb{R}$ takich, że $0 < r \leqslant R$, to twierdzenie sprowadza się do lematu 2.7. W przeciwnym wypadku istnieją ciągi $\mathbb{N} \ni n \mapsto r_n \in \mathbb{R}_+$ i $\mathbb{N} \ni n \mapsto R_n \in \mathbb{R}_+$ takie, że ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n := \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0; r_n, R_n))$ spełnia warunek

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \ \text{ oraz } \ A_n \subset A_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.32}$$

Przyjmując $B_n := \mathrm{Ei}(A_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, wnioskujemy z (2.32), że

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B \ \text{ oraz } \ B_n \subset B_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Z własności (2.33) wynika istnienie $j \in \mathbb{N}$ takiego, że

$$p, q \in B_n, \quad n \in \mathbb{Z}_j. \tag{2.34}$$

Ponieważ obcięcie $f_n := f|_{A_n} : A_n \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest funkcją ciągłą i różnowartościową dla $n \in \mathbb{N}$, więc uwzględniając warunek (2.34) i korzystając z lematu 2.7 stwierdzamy, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}_j$ istnieje dokładnie jeden $\varphi_n \in \operatorname{Log}(f_n)$ spełniający równość $\varphi_n(p) = q$. Z (2.33) wynika, że $B_n \subset B_m$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $m \in \mathbb{Z}_n$. Zatem dla dowolnych $n \in \mathbb{Z}_j$, $m \in \mathbb{Z}_n$ oraz $z \in B_n$ mamy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_m|_{B_n}(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_m(z)} = f_m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}),$$

i w konsekwencji $\varphi_m|_{B_n} \in \operatorname{Log}(f_n)$. Ponieważ $\varphi_n(p) = q = \varphi_m(p)$ dla $n, m \in \mathbb{Z}_j$, więc z lematu 2.4 wnioskujemy, że

$$\varphi_m|_{B_n} = \varphi_n, \quad n \in \mathbb{Z}_j,\ m \in \mathbb{Z}_n. \tag{2.35}$$

Z własności (2.33) wynika, że dla każdego $z \in B$ zbiór $K_z \neq \emptyset$, gdzie K_z jest zbiorem wszystkich $w \in \mathbb{C}$ takich, że $z \in B_n$ i $w = \varphi_n(z)$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}_j$. Dla dowolnych $z \in B$ i $w, w' \in K_z$ istnieją $n, m \in \mathbb{Z}_j$ takie, że $z \in B_n \cap B_m$, $w = \varphi_n(z)$ i $w' = \varphi_m(z)$, skąd na podstawie (2.35), $w' = \varphi_m(z) = \varphi_n(z) = w$, gdy $m \geqslant n$, oraz analogicznie $w = w'$, gdy $n \geqslant m$. Dlatego dla każdego $z \in B$ zbiór K_z jest jednoelementowy, i tym samym istnieje funkcja $\varphi : B \to \mathbb{C}$ spełniająca warunek

$$K_z = \{\varphi(z)\}, \quad z \in B. \tag{2.36}$$

Z definicji zbiorów K_z dla $z \in B$ wynika, że dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_j$ i $z \in B_n$, $\varphi_n(z) \in K_z$, skąd na mocy (2.36),

$$\varphi|_{B_n} = \varphi_n, \quad n \in \mathbb{Z}_j. \tag{2.37}$$

Ustalmy dowolnie $z \in B$. Korzystając z definicji zbiorów A_n, $n \in \mathbb{N}$, i własności (2.33) widzimy, że $\mathbb{D}(z, \eta) \cap B \subset B_n$ dla pewnych $n \in \mathbb{Z}_j$ i $\eta \in \mathbb{R}_+$. Ponieważ φ_n jest funkcją ciągłą, więc z (2.37) wynika, że funkcja φ jest ciągła w punkcie z. Zatem funkcja φ jest ciągła w każdym punkcie $z \in B$. Co więcej, korzystając z (2.37) mamy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n(z)} = f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}), \quad n \in \mathbb{Z}_j,\ z \in B_n,$$

a to łącznie z (2.33) daje $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$. Z warunku (2.34) mamy $p \in B_j$, skąd na mocy definicji zbioru K_p, $q = \varphi_j(p) \in K_p$. To łącznie z (2.36) daje $\varphi(p) = q$. Stosując na koniec lemat 2.4 widzimy, że φ jest dokładnie jedną taką funkcją, co kończy dowód. □

Uwaga 2.9. Szkic alternatywnego dowodu twierdzenia 2.8 oparty na przedłużaniu analitycznym oraz na twierdzeniu o monodromii jest podany w [13, Remark 3.3]. Przedłużanie dotyczy elementów analitycznych powstałych z odwracania funkcji $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, która jest lokalnie odwzorowaniem konforemnym.

2.3 Różnowartościowość reprezentacji wykładniczej funkcji

Na podstawie twierdzenia 2.8 wiemy, że $\operatorname{Log}(f) \neq \emptyset$ pod warunkiem, że $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest funkcją ciągłą i różnowartościową na spójnym zbiorze radialnym A. Powstaje naturalne pytanie o różnowartościowość funkcji $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$. Generalnie wydaje się, że jest to dość trudny problem. W związku z tym ograniczymy dalsze rozważania do kilku prostych, ale użytecznych w dalszym ciągu przypadków.

Lemat 2.10. *Niech A będzie spójnym zbiorem radialnym oraz $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie funkcją ciągłą i różnowartościową. Jeśli*

$$\mathbb{T}(0, r) \subset A \quad i \quad \mathbb{T}(0, R) = f(\mathbb{T}(0, r)) \tag{2.38}$$

dla pewnych $r, R \in \mathbb{R}_+$, to istnieje $n_f \in \{-1, 1\}$ taki, że dla każdego $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$,

$$\varphi(z + 2\pi) - \varphi(z) = 2\pi n_f, \quad z \in B := \operatorname{Ei}(A). \tag{2.39}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie A i f spełniające założenia lematu oraz $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$. Przyjmując

$$B \ni z \mapsto \tilde{\varphi}(z) := \varphi(z + 2\pi), \tag{2.40}$$

widzimy, że $\tilde{\varphi}$ jest funkcją ciągłą oraz dla każdego $z \in B$,

$$e^{i\tilde{\varphi}(z)} = e^{i\varphi(z+2\pi)} = f\Big(e^{i(z+2\pi)}\Big) = f(e^{iz}).$$

Zatem $\tilde{\varphi} \in \operatorname{Log}(f)$. Z lematu 2.3 wynika, że istnieje $n \in \mathbb{Z}$ spełniający zależność

$$\varphi(z + 2\pi) - \varphi(z) = \tilde{\varphi}(z) - \varphi(z) = 2\pi n, \quad z \in B. \tag{2.41}$$

Załóżmy teraz, że $|n| > 1$. Z (2.41) mamy

$$\frac{1}{n}\varphi(z + 2\pi) - \frac{1}{n}\varphi(z) = 2\pi, \quad z \in B, \tag{2.42}$$

a więc istnieje funkcja $g : A \to \mathbb{C}$ spełniająca następujący warunek

$$g(e^{iz}) = e^{i\varphi(z)/n}, \quad z \in B. \tag{2.43}$$

Ponieważ $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$, więc z (2.43) wynika, że

$$g(e^{iz})^n = e^{i\varphi(z)} = f(e^{iz}), \quad z \in B. \tag{2.44}$$

Stąd i z warunku (2.38) otrzymujemy inkluzję

$$g(\mathbb{T}(0,r)) \subset \mathbb{T}(0, \sqrt[n]{R}). \tag{2.45}$$

Przyjmując

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \psi(t) := \frac{1}{n} \operatorname{Re}\Big(\varphi(t - \mathrm{i}\log r)\Big), \tag{2.46}$$

widzimy, że ψ jest funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych. Ponadto z (2.41) wynika, że $\psi(2\pi) = \psi(0) + 2\pi$. Korzystając więc z zasady Darboux dostajemy inkluzję $[\psi(0); \psi(0) + 2\pi] \subset \psi([0; 2\pi])$. Z drugiej strony, własności (2.43) i (2.45) implikują

$$g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = g\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\mathrm{i}\log r)}\Big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t-\mathrm{i}\log r)/n} = \sqrt[n]{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stąd $g(\mathbb{T}(0,r)) = \mathbb{T}(0, \sqrt[n]{R})$, i w konsekwencji dla każdego $u \in \mathbb{T}(0,r)$ istnieje $v \in \mathbb{T}(0,r)$ taki, że $g(v) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n} g(u)$. Dlatego $u \neq v$ i wobec (2.44),

$$f(v) = g(v)^n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} g(u)^n = f(u).$$

To przeczy różnowartościowości funkcji f. Zatem $|n| \leqslant 1$. Załóżmy, że $n = 0$. Wówczas warunek (2.41) przyjmuje postać

$$\varphi(z + 2\pi) = \varphi(z), \quad z \in B. \tag{2.47}$$

Stąd funkcja $\mathbb{R} \ni t \mapsto \psi_0(t) := \operatorname{Re}\Big(\varphi(t - \mathrm{i}\log r)\Big)$ spełnia równość $\psi_0(0) = \psi_0(2\pi)$. Ponieważ ψ_0 jest funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych, więc stosując ponownie zasadę Darboux widzimy, że $0 < t_2 - t_1 < 2\pi$ i $\psi_0(t_1) = \psi_0(t_2)$ dla pewnych $t_1, t_2 \in [0; 2\pi]$. Przyjmując więc $z_1 := t_1 - \mathrm{i}\log r$ i $z_2 := t_2 - \mathrm{i}\log r$ dostajemy

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1} \neq r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}. \tag{2.48}$$

Stąd $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} \in \mathbb{T}(0,r)$, co wobec założenia (2.38) prowadzi do

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t_1-\mathrm{i}\log r)} = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_0(t_1)} = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_0(t_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t_2-\mathrm{i}\log r)} = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}).$$

To łącznie z (2.48) przeczy różnowartościowości funkcji f. Dlatego $0 < |n| \leqslant 1$. Stąd $n_f := n \in \{-1, 1\}$ i, z uwagi na (2.41), zachodzi warunek (2.39). Korzystając na koniec z lematu 2.3 widzimy, że warunek (2.39) zachodzi dla każdego $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.11. *Niech A będzie spójnym zbiorem radialnym oraz $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie funkcją ciągłą oraz różnowartościową. Jeśli warunek* (2.38) *zachodzi dla pewnych $r, R \in \mathbb{R}_+$, to każda funkcja $\varphi \in \operatorname{Log}(f)$ jest różnowartościowa.*

Dowód. Ustalmy dowolnie A i f spełniające założenia twierdzenia oraz $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$. Z lematu 2.10 wynika, że warunek (2.39) zachodzi ze stałą $n_f \in \{-1, 1\}$. Załóżmy, że $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ dla dowolnie zadanych $z_1, z_2 \in B := \mathrm{Ei}(A)$. Wówczas

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z_1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z_2)} = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}).$$

Ponieważ funkcja f jest różnowartościowa, więc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}$. Stąd $z_2 - z_1 = 2\pi m$ dla pewnego $m \in \mathbb{Z}$, co wobec warunku (2.39) daje

$$0 = \varphi(z_2) - \varphi(z_1) = \varphi(z_1 + 2\pi m) - \varphi(z_1) = 2\pi m n_f.$$

W konsekwencji $m = 0$, i tym samym $z_1 = z_2$. Dlatego funkcja φ jest różnowartościowa, czego należało dowieść. □

Z własności funkcji wykładniczej exp wiemy, że funkcja

(2.49) $$\mathbb{C} \ni z \mapsto \theta(z) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$$

jest holomorficzna i różnowartościowa w każdym pasie

(2.50) $$\Omega_p := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} p| < \pi\}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Dlatego dla każdego $p \in \mathbb{C}$ funkcja obcięta $\theta_p := \theta|_{\Omega_p}$ jest odwzorowaniem konforemnym obszaru Ω_p na obszar

(2.51) $$\theta_p(\Omega_p) = \theta(\Omega_p) = \mathbb{C} \setminus \{-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Re} p} : t \in [0; +\infty)\}.$$

Odwzorowanie odwrotne θ_p^{-1} można wyrazić za pomocą standardowej funkcji log, rozumianej jako funkcję odwrotną do funkcji exp obciętej do obszaru $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$, w następujący sposób

(2.52) $$\theta_p^{-1}(z) = \operatorname{Re} p - \mathrm{i}\log\left(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\operatorname{Re} p}\right), \quad z \in \theta_p(\Omega_p).$$

Wniosek 2.12. *Dla dowolnych $r, R \in \mathbb{R}_+$ i homeomorfizmu f koła $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r))$ na koło $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,R))$, jeśli $f(0) = 0$ to każdy $\varphi \in \mathrm{Log}(f|_A)$ jest homeomorfizmem zbioru $B := \mathrm{Ei}(A)$ na zbiór $B' := \mathrm{Ei}(A')$, gdzie $A := \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r)) \setminus \{0\}$ i $A' := \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,R)) \setminus \{0\}$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie r, R i f spełniające założenia wniosku oraz $\varphi \in \mathrm{Log}(f|_A)$. Wówczas A jest spójnym zbiorem radialnym, $f|_A : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest funkcją ciągłą i różnowartościową oraz $f|_A(\mathbb{T}(0,r)) = \mathbb{T}(0,R)$. Z twierdzenia 2.11 wynika, że φ jest odwzorowaniem różnowartościowym. Ponieważ $f(A) = A'$, więc z własności (2.39) wynika, że $\varphi(B) = B'$. Ponadto funkcja φ jest ciągła w B, gdyż $\varphi \in \mathrm{Log}(f|_A)$. Stąd dla każdego $p \in B$ istnieje $r_p > 0$ taki, że $\mathbb{D}(p, r_p) \subset \Omega_p$ i $\varphi(\mathbb{D}(p, r_p) \cap B) \subset \Omega_{\varphi(p)}$.

Z warunku (2.4) wynika więc, że φ ma dla każdego $p \in B$ następującą reprezentację lokalną

$$\varphi(z) = \left(\theta_{\varphi(p)}\right)^{-1} \circ f \circ \theta_p(z), \quad z \in \mathbb{D}(p, r_p) \cap B. \tag{2.53}$$

Dlatego φ^{-1} jest odwzorowaniem ciągłym w B', i w konsekwencji φ jest homeomorfizmem zbioru B na zbiór B', co jest żądaną tezą. □

2.4 Odwzorowania quasikonforemne płaszczyzny zespolonej

Podobnie jak w przypadku odwzorowań quasiregularnych można — korzystając z izometrycznej równoważności przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$ i $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ — zdefiniować odwzorowania quasikonforemne płaszczyzny zespolonej następująco. Niech Ω będzie obszarem niepustym.

Definicja 2.13. Dla dowolnego $K \in [1; +\infty)$ funkcję $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nazywamy *odwzorowaniem K-quasikonforemnym płaszczyzny zespolonej* (alt. *zespolonym odwzorowaniem K-quasikonforemnym*) :⇔ złożenie $\ell^{-1} \circ f \circ \ell$ jest odwzorowaniem K-quasikonforemnym w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$.

Klasę wszystkich odwzorowań K-quasikonforemnych płaszczyzny zespolonej określonych w Ω będziemy oznaczać przez $\mathrm{QC}(\Omega; K)$.

Definicja 2.14. Funkcję $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nazywamy *odwzorowaniem quasikonforemnym płaszczyzny zespolonej* (alt. *zespolonym odwzorowaniem quasikonforemnym*) :⇔ złożenie $\ell^{-1} \circ f \circ \ell$ jest odwzorowaniem quasikonforemnym w przestrzeni $\mathrm{E}(\mathbb{R}^2)$.

Klasę wszystkich odwzorowań quasikonforemnych płaszczyzny zespolonej określonych w Ω będziemy oznaczać przez $\mathrm{QC}(\Omega)$. W dalszym ciągu będziemy używać krótszych terminów: *odwzorowanie K-quasikonforemne* i *odwzorowanie quasikonforemne* zamiast odpowiednio: *odwzorowanie K-quasikonforemne płaszczyzny zespolonej* i *odwzorowanie quasikonforemne płaszczyzny zespolonej.* Z definicji 2.13 i 2.14 wnosimy, że dla każdej funkcji $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f jest odwzorowaniem quasikonforemnym wtedy i tylko wtedy, gdy f jest odwzorowaniem K-quasikonforemnym dla pewnego $K \in [1; +\infty)$. Ponadto każde odwzorowanie quasikonforemne jest homeomorfizmem. Spośród wszystkich homeomorfizmów w płaszczyźnie zespolonej można wyróżnić homeomorfizmy zachowujące orientację i homeomorfizmy zmieniające orientację na przeciwną. Jednym ze sposobów jak to zrobić jest ten niżej opisany.

Niech f będzie homeomorfizmem zbioru niepustego $A_1 \subset \mathbb{C}$ na zbiór $A_2 \subset \mathbb{C}$. Ustalmy dowolnie obszar D ograniczony krzywą Jordana Γ o tej własności, że $\mathrm{cl}(D) \subset A_1$. Istnieją odwzorowania konforemne h_1 i h_2 koła $\mathbb{D}$ na obszary D i $f(D)$, odpowiednio. Ponieważ oba te obszary są ograniczone krzywą Jordana, więc odwzorowania h_1 i h_2 mają rozszerzenia do homeomorfizmów h_1^* i h_2^* koła domkniętego $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na domknięcia $\mathrm{cl}(D)$ i $\mathrm{cl}(f(D))$, odpowiednio. W rezultacie złożenie $(h_2^*)^{-1} \circ f \circ (h_1^*|_{\mathbb{T}})$ jest homeomorfizmem okręgu $\mathbb{T}$ na siebie. Z lematu 2.10 wynika istnienie stałej $N(f; h_1, h_2) \in \{-1, 1\}$ o tej własności, że

$$\varphi(t + 2\pi) - \varphi(t) = 2\pi N(f; h_1, h_2), \quad t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathrm{Log}\Big((h_2^*)^{-1} \circ f \circ (h_1^*|_{\mathbb{T}})\Big). \tag{2.54}$$

Definicja 2.15. Homeomorfizm f zbioru niepustego $A_1 \subset \mathbb{C}$ na zbiór $A_2 \subset \mathbb{C}$ nazywamy *zachowującym orientację* (odp. *zmieniającym orientację na przeciwną*) $:\Leftrightarrow$ $N(f; h_1, h_2) = 1$ (odp. $N(f; h_1, h_2) = -1$), niezależnie od wyboru obszaru D i odwzorowań konforemnych h_1 i h_2 spełniających wyżej opisane warunki.

Szereg ważnych własności odwzorowań quasikonforemnych można wyprowadzić z ich geometrycznej charakteryzacji za pomocą modułu czworoboku. Przez *czworobok* rozumiemy strukturę $(Q; I_1, I_2)$, gdzie Q jest obszarem ograniczonym krzywą Jordana, zaś I_1 i I_2 są rozłącznymi łukami na tej krzywej, niezdegenerowanymi do punktu. Dla każdego czworoboku $(Q; I_1, I_2)$ istnieje dokładnie jedna liczba $M \in \mathbb{R}_+$ i dokładnie jedno odwzorowanie konforemne h obszaru Q na wnętrze prostokąta $[0; M + \mathrm{i}]$ o tej własności, że ciągłe rozszerzenie h^* odwzorowania h na $\mathrm{cl}(Q)$ spełnia równości $h^*(I_1) = [0; M]$ i $h^*(I_2) = [\mathrm{i}; M + \mathrm{i}]$. Określoną w ten sposób liczbę $\mathrm{Mod}(Q; I_1, I_2) := M$ nazywa się *modułem czworoboku* $(Q; I_1, I_2)$.

Przytoczymy teraz kluczowe w teorii odwzorowań quasikonforemnych twierdzenie, które podaje geometryczną charakteryzację odwzorowań quasikonforemnych.

Twierdzenie 2.16 ([18, Theorem 3.3, p. 174] i [1, Chap. II])**.** *Dla wszystkich $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $K \in [1; +\infty)$, $f \in \mathrm{QC}(\Omega; K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest homeomorfizmem zachowującym orientację i dla każdego czworoboku $(Q; I_1, I_2)$ o tej własności, że $\mathrm{cl}(Q) \subset \Omega$, zachodzi nierówność*

$$\mathrm{Mod}(f(Q); f(I_1), f(I_2)) \leqslant K\, \mathrm{Mod}(Q; I_1, I_2). \tag{2.55}$$

Korzystając z tej charakteryzacji odwzorowań quasikonforemnych można wykazać wiele interesujących własności geometrycznych odwzorowań quasikonforemnych, szeroko opisanych w książkach [18] i [1]. Należy przede wszystkim zwrócić uwagę na własności grupowe odwzorowań quasikonforemnych ze względu na operację składania odwzorowań. Z twierdzenia 2.11 wynika, że każda reprezentacja wykładnicza φ w (2.54) jest

różnowartościowa, i tym samym φ jest homeomorfizmem prostej $\mathbb{R}$ na siebie. Ponadto dla dowolnych homeomorfizmów φ i ψ prostej $\mathbb{R}$ na siebie spełniających warunek

$$\varphi(t+2\pi)-\varphi(t)=2\pi \ \text{ i } \ \psi(t+2\pi)-\psi(t)=2\pi, \quad t\in\mathbb{R},$$

dostajemy

$$\psi\circ\varphi(t+2\pi)-\psi\circ\varphi(t)=\psi(\varphi(t+2\pi))-\psi(\varphi(t))=\psi(\varphi(t)+2\pi)-\psi(\varphi(t))=2\pi, \quad t\in\mathbb{R},$$

oraz

$$2\pi=\varphi(\varphi^{-1}(t)+2\pi)-\varphi(\varphi^{-1}(t))=\varphi(\varphi^{-1}(t)+2\pi)-t, \quad t\in\mathbb{R},$$

skąd

$$\varphi^{-1}(t+2\pi)-\varphi^{-1}(t)=2\pi, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Dlatego złożenie homeomorfizmów zachowujących orientację jest homeomorfizmem zachowującym orientację oraz homeomorfizm odwrotny do homeomorfizmu zachowującego orientację jest homeomorfizmem zachowującym orientację. Ustalmy dowolnie obszary niepuste Ω i Ω', $K,K'\in[1;+\infty)$ oraz $f\in \mathrm{QC}(\Omega;K)$ i $g\in\mathrm{QC}(\Omega';K')$ takie, że $f(\Omega)\subset\Omega'$. Wtedy dla każdego czworoboku $(Q;I_1,I_2)$ spełniającego warunek $\mathrm{cl}(Q)\subset\Omega$, $(f(Q);f(I_1),f(I_2))$ jest czworobokiem o własności $\mathrm{cl}(f(Q))\subset f(\Omega)\subset\Omega'$, skąd na mocy twierdzenia 2.16,

$$\mathrm{Mod}(g(f(Q));g(f(I_1)),g(f(I_2)))\leqslant K'\,\mathrm{Mod}(f(Q);f(I_1),f(I_2))\leqslant K'K\,\mathrm{Mod}(Q;I_1,I_2).$$

Zauważmy, że stosując nierówność (2.55) dla czworoboku $(Q;I_1',I_2')$ z komplementarną parą łuków w stosunku do czworoboku $(Q;I_1,I_2)$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Mod}(f(Q);f(I_1),f(I_2))}&=\mathrm{Mod}(f(Q);f(I_1'),f(I_2'))\\&\leqslant K\,\mathrm{Mod}(Q;I_1',I_2')=\frac{K}{\mathrm{Mod}(Q;I_1,I_2)},\end{aligned}$$

skąd

$$\mathrm{Mod}(f(Q);f(I_1),f(I_2))\geqslant\frac{1}{K}\,\mathrm{Mod}(Q;I_1,I_2).$$

Dlatego dla każdego czworoboku $(Q;I_1,I_2)$ spełniającego warunek $\mathrm{cl}(Q)\subset f(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}(f^{-1}(Q);f^{-1}(I_1),f^{-1}(I_2))&\leqslant K\,\mathrm{Mod}(f(f^{-1}(Q));f(f^{-1}(I_1)),f(f^{-1}(I_2)))\\&=K\,\mathrm{Mod}(Q;I_1,I_2),\end{aligned}$$

gdyż $(f^{-1}(Q);f^{-1}(I_1),f^{-1}(I_2))$ jest czworobokiem o własności $\mathrm{cl}(f^{-1}(Q))\subset\Omega$. Korzystając ponownie z twierdzenia 2.16 wnioskujemy, że

$$f^{-1}\in\mathrm{QC}(f(\Omega);K) \ \text{ i } \ g\circ f\in\mathrm{QC}(\Omega;KK'), \quad f\in\mathrm{QC}(\Omega;K),\ g\in\mathrm{QC}(\Omega';K'); \tag{2.56}$$

por. [18, Chap. I, §3], [1, Chap. II, Sec. A]. Z twierdzenia 2.16 można wyprowadzić — rozważając pewne ekstremalne zagadnienia dla modułów czworoboku — następujące dwa twierdzenia o zniekształceniu odwzorowań quasikonforemnych.

Twierdzenie 2.17 (Hersch-Pfluger 1952, [12]). *Dla dowolnych* $K \in [1;+\infty)$ *i* $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$, *jeśli* $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ *i* $f(0) = 0$ *to*

$$|f(z)| \leqslant \Phi_K(|z|), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.57}$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [12] i [18, Theorem 3.1, p. 64]. Nierówność (2.57) jest odpowiednikiem klasycznej nierówności Schwarza dla odwzorowań konforemnych koła jednostkowego; por. np. [29, Chap. 12]. Funkcja Φ_K jest tzw. *funkcją dystorsji Herscha-Pflugera*; por. [12], [18, Chap. II, §3]. Jest zdefiniowana dla każdego $K \in \mathbb{R}_+$ wzorami:

$$\Phi_K(0) := 0, \ \Phi_K(1) := 1 \ \text{ i } \ \Phi_K(r) := \mu^{-1}(\mu(r)/K), \quad r \in (0;1), \tag{2.58}$$

gdzie $\mu(r) := \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Mod}(\mathbb{D}\cap\mathbb{C}_+;[r;1],[-1;0])$ dla $r \in (0;1)$. Podstawowe własności funkcji Φ_K można znaleźć w [18, Chap. II, §3]. Szerzej funkcje te były badane w pracach [2], [21], [22], [35], [36].

Twierdzenie 2.18 (Mori 1957, [20]). *Dla dowolnych* $K \in [1;+\infty)$ *i* $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$, *jeśli* $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ *i* $f(0) = 0$ *to*

$$|f(z) - f(w)| \leqslant 16|z-w|^{1/K}, \quad z,w \in \mathbb{D}. \tag{2.59}$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [18, Theorem 3.2, p. 66], [1, Chap. III, Sec. C]. Z nierówności (2.59) wynika, że f jest funkcją holderöwską rzędu $1/K$.

Uwaga 2.19. Ustalmy dowolnie $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ o tej własności, że $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ i $f(0) = 0$. Wtedy $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$ dla pewnego $K \in [1;+\infty)$. Z twierdzenia 2.18 wynika jednostajna ciągłość funkcji f. Dlatego f ma ciągłe rozszerzenie f^* na koło domknięte $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$. Z drugiej strony, $f^{-1} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$, $f^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ i $f^{-1}(0) = 0$. Stosując twierdzenie 2.18 dla odwzorowania odwrotnego f^{-1} otrzymujemy

$$|f(z) - f(w)| \geqslant \frac{1}{16^K}|z-w|^K, \quad z,w \in \mathbb{D}. \tag{2.60}$$

Zatem f^* jest homeomorfizmem koła domkniętego $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie i $f^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Warto odnotować, że własność homeomorficznej rozszerzalności zachodzi w ogólniejszym przypadku, gdy f jest odwzorowaniem quasikonforemnym obszaru ograniczonego krzywą Jordana na obszar tego rodzaju; por. [18, Theorem 8.2, p. 42].

Rozdział 3

Struktura odwzorowań quasiregularnych

Przypomnijmy, że *dylatacją zespoloną funkcji* $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ nazywamy funkcję

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto \omega(z) := \begin{cases} \frac{\bar{\partial} f(z)}{\partial f(z)} & , \text{ gdy } \partial f(z) \neq 0, \\ 0 & , \text{ gdy } \partial f(z) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ustalmy dowolnie funkcję $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ różną od stałej. Ponieważ f jest funkcją ciągłą i $f \in \mathrm{ACL}(\mathbb{D}; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$, więc zbiory $\mathrm{D_x}(f)$ i $\mathrm{D_y}(f)$ są borelowskie, pochodne $\partial_{\mathrm{x}} f$ i $\partial_{\mathrm{y}} f$ są funkcjami borelowskimi oraz $\mu_\ell(\mathbb{D} \setminus \mathrm{D_x}(f)) = 0 = \mu_\ell(\mathbb{D} \setminus \mathrm{D_y}(f))$; por. uwaga 1.4. Zatem ∂f i $\bar{\partial} f$ są również funkcjami borelowskimi, i wobec wzoru (3.1), funkcja ω jest borelowska, i przez to mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{M}_\ell$. Na mocy definicji 1.11, 1.6 i 1.10, $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D}; K)$ dla pewnego $K \in [1; +\infty)$. Z warunku (iii) wniosku 1.17 mamy $1 + |\omega(z)| \leqslant K(1 - |\omega(z)|)$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \mathbb{D}$, skąd

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z \in \mathbb{D}} |\omega(z)| \leqslant \frac{K-1}{K+1} < 1. \tag{3.2}$$

Z lematu 1.16 wynika, że $|\partial f(z)| > 0$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \mathbb{D}$, skąd na mocy wzoru (3.1), $\omega(z) = \frac{\bar{\partial} f(z)}{\partial f(z)}$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \mathbb{D}$. Korzystając z odpowiednika tw. Riemanna dla odwzorowań quasikonforemnych stwierdzamy istnienie odwzorowania $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ takiego, że

$$\bar{\partial}\varphi(z) = \omega(z)\partial\varphi(z) \quad \text{dla } \mu_\ell\text{-p.w. } z \in \mathbb{D}, \tag{3.3}$$

oraz

$$\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \ \text{ i } \ \varphi(0) = 0; \tag{3.4}$$

por. [7], [1, Chap. V, Sec. B], [18, Chap. IV, §5]. Odwzorowanie φ spełniające warunek (3.3) jest rozwiązaniem równania Beltramiego $\bar\partial\zeta(z) = \omega(z)\partial\zeta(z)$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \mathbb{D}$ z funkcją niewiadomą $\zeta : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Przez długi okres czasu istnienie rozwiązania równania Beltramiego było wiodącym problemem. Podawano częściowe jego rozwiązania przy dodatkowych warunkach nakładanych na funkcję ω. Ostatecznie problem został rozwiązany przez Bojarskiego w 1955; por. [5] oraz [6]. Niezależne rozwiązanie problemu podał Ahlfors w swojej książce [1, Chap. V]. Dodatkowo z nierówności (3.2) wynika, że $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$. Ponieważ φ jest homeomorfizmem, więc możemy rozważać funkcję

$$g := f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

Ponieważ $f, \varphi \in \mathrm{QR}(\mathbb{D}; K)$, więc na mocy twierdzenia 1.15, $f, \varphi \in \mathrm{ACL}(\mathbb{D}; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$ oraz dla każdego zbioru zwartego $E \subset \mathbb{D}$,

$$\int_E (|\partial f|^2 + |\bar\partial f|^2) \mathrm{d}\mu_\ell < +\infty \quad \text{i} \quad \int_E (|\partial\varphi|^2 + |\bar\partial\varphi|^2) \mathrm{d}\mu_\ell < +\infty.$$

Spełnione są więc założenia lematu [18, Lemma 6.4, p. 151], w związku z czym $g \in \mathrm{ACL}(\mathbb{D}; \mathrm{E}(\mathbb{C}))$, $\int_E (|\partial g| + |\bar\partial g|) \mathrm{d}\mu_\ell < +\infty$ dla każdego zbioru zwartego $E \subset \mathbb{D}$ i

$$\bar\partial g = \bar\partial(f \circ \varphi^{-1}) = (\partial f \circ \varphi^{-1}) \cdot \bar\partial\varphi^{-1} + (\bar\partial f \circ \varphi^{-1}) \cdot \bar\partial\, \overline{\varphi^{-1}}$$

μ_ℓ-p.w. w $\mathbb{D}$. Z twierdzenia 1.15 i lematu 1.16 wynika, że $\mathrm{J}[\varphi](z) > 0$ dla μ_ℓ-p.w. $z \in \mathbb{D}$. Ponieważ $\partial(\varphi^{-1} \circ \varphi) = 1$ i $\bar\partial(\varphi^{-1} \circ \varphi) = 0$ w $\mathbb{D}$, więc

$$\partial(\varphi^{-1}) \circ \varphi = \frac{\bar\partial\overline{\varphi}}{\mathrm{J}[\varphi]} \quad \text{i} \quad \bar\partial(\varphi^{-1}) \circ \varphi = \frac{-\bar\partial\varphi}{\mathrm{J}[\varphi]} \quad \mu_\ell\text{-p.w. w } \mathbb{D}.$$

Korzystając z (3.3) dostajemy μ_ℓ-p.w. w $\mathbb{D}$ równości

$$\begin{aligned}
\bar\partial g &= -(\partial f \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{\bar\partial\varphi \circ \varphi^{-1}}{\mathrm{J}[\varphi] \circ \varphi^{-1}} + (\bar\partial f \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{\partial\varphi \circ \varphi^{-1}}{\mathrm{J}[\varphi] \circ \varphi^{-1}} \\
&= [-(\partial f \circ \varphi^{-1}) \cdot (\omega \circ \varphi^{-1}) + \bar\partial f \circ \varphi^{-1}] \cdot \frac{\partial\varphi \circ \varphi^{-1}}{\mathrm{J}[\varphi] \circ \varphi^{-1}} \\
&= [\bar\partial f - \omega\partial f] \cdot \frac{\partial\varphi}{\mathrm{J}[\varphi]} \circ \varphi^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Stąd na mocy uwagi 1.18, $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Ze wzoru (3.5) wynika zaś, że

$$f = (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = g \circ \varphi. \tag{3.6}$$

Zatem każda funkcja $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ ma rozkład (3.6) na funkcję holomorficzną $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ i odwzorowanie quasikonforemne φ koła $\mathbb{D}$ na siebie. Przy dodatkowych założeniach na funkcję $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ można uzyskać dodatkowe własności części holomorficznej g. Przykładem jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1 ([32, Theorem 4.1]). *Dla każdego domkniętego odwzorowania quasiregularnego $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ płaszczyzny zespolonej, jeśli $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ i f nie jest funkcją stałą to $f = g \circ \varphi$ dla pewnego skończonego iloczynu Blaschkego g i pewnego $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ takiego, że $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.*

W tym rozdziale wykażemy wariant twierdzenia 3.1 z zastąpieniem domkniętości odwzorowania f przez pewien bardziej naturalny warunek brzegowy; por. twierdzenie 3.12. Dodatkowo zostaną scharakteryzowane miejsca zerowe iloczynu Blaschkego g. W tym celu użyjemy pojęcia stopnia odwzorowania ciągłego w punkcie i jego własności, dokładnie opisanych w podrozdziale 3.1. W podrozdziale 3.2 wykażemy wariant twierdzenia Fatou o skończonych iloczynach Blaschkego, użyteczny w dowodzie twierdzenia 3.12.

3.1 Stopień odwzorowania ciągłego w punkcie

Niech $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$. Na mocy uwagi 2.5 wiemy, że dla każdego $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ istnieje funkcja ciągła $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek (2.11), a więc $\mathrm{Log}(f) \neq \emptyset$.

Lemat 3.2. *Dla każdego $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ istnieje dokładnie jedna liczba $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ o tej własności, że*

$$2\pi \deg(f) = \varphi(t + 2\pi) - \varphi(t), \quad \varphi \in \mathrm{Log}(f),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ i $\psi \in \mathrm{Log}(f)$. Ponieważ funkcja $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tilde{\psi}(t) := \psi(t + 2\pi)$ jest ciągła i

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\psi}(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(t+2\pi)} = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+2\pi)}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}), \quad t \in \mathbb{R},$$

więc $\tilde{\psi} \in \mathrm{Log}(f)$. Z lematu 2.3 wynika istnienie $n_\psi \in \mathbb{Z}$ o tej własności, że

$$\psi(t + 2\pi) - \psi(t) = \tilde{\psi}(t) - \psi(t) = 2\pi n_\psi, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Stosując ponownie lemat 2.3 widzimy, że dla każdego $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$ istnieje $n \in \mathbb{Z}$ taki, że $\varphi(t) - \psi(t) = 2\pi n$ dla $t \in \mathbb{R}$, skąd

$$\begin{aligned}[\varphi(t + 2\pi) - \varphi(t)] - [\psi(t + 2\pi) - \psi(t)] &= [\varphi(t + 2\pi) - \psi(t + 2\pi)] - [\varphi(t) - \psi(t)] \\ &= 2\pi n - 2\pi n = 0, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

To łącznie z (3.8) daje

$$\varphi(t + 2\pi) - \varphi(t) = \psi(t + 2\pi) - \psi(t) = 2\pi n_\psi, \quad \varphi \in \mathrm{Log}(f),\ t \in \mathbb{R}.$$

Przyjmując więc $\deg(f) := n_\psi$ otrzymujemy własność (3.7), co kończy dowód. □

Funkcja $\rho : (\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek

$$\rho((z',t'),(z'',t'')) = \max(\{|z'-z''|, |t'-t''|\}), \quad z',z'' \in \mathbb{C},\ t',t'' \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

jest metryką w $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, która metryzuje topologię produktową w $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Przypomnijmy, że funkcje ciągłe $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ nazywamy *homotopijnymi* $:\Leftrightarrow$ istnieje funkcja ciągła $H : \mathbb{T} \times [0;1] \to \mathbb{T}$ z przestrzeni metrycznej $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}, \rho)$ do $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ taka, że $H(z,0) = f(z)$ i $H(z,1) = g(z)$ dla $z \in \mathbb{T}$. Fakt, że funkcje f i g są homotopijne wyrażamy przez $f \sim g$. Relacja homotopijności $\sim$ jest relacją równoważności; por. [11, Chap. 0].

Lemat 3.3. *Dla dowolnych funkcji ciągłych $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ spełniających warunek* (2.13) *zachodzi równość* $\deg(f) = \deg(g)$.

Dowód. Ustalmy dowolnie funkcje $f, g \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ spełniające warunek (2.13). Z lematu 2.6 wynika, że dla dowolnie zadanych $\varphi \in \mathrm{Log}(f)$ i $\psi \in \mathrm{Log}(g)$,

$$(\varphi(t) - \psi(t)) - (\varphi(0) - \psi(0)) = \arcsin\left(\operatorname{Im}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right) - \arcsin\left(\operatorname{Im}\frac{f(1)}{g(1)}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stosując powyższą równość dla $t := 2\pi$ i korzystając z lematu 3.2 dostajemy

$$\begin{aligned} 2\pi\Big(\deg(f) - \deg(g)\Big) &= (\varphi(2\pi) - \varphi(0)) - (\psi(2\pi) - \psi(0)) \\ &= (\varphi(2\pi) - \psi(2\pi)) - (\varphi(0) - \psi(0)) \\ &= \left[\arcsin\left(\operatorname{Im}\frac{f(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})}{g(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})}\right) - \arcsin\left(\operatorname{Im}\frac{f(1)}{g(1)}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Dlatego $\deg(f) = \deg(g)$, co dowodzi lematu. □

Twierdzenie 3.4. *Dla dowolnych funkcji ciągłych $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, jeśli $f \sim g$ to* $\deg(f) = \deg(g)$.

Dowód. Ustalmy dowolnie funkcje ciągłe $f, g \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ takie, że $f \sim g$. Istnieje wówczas funkcja ciągła $H : \mathbb{T} \times [0;1] \to \mathbb{T}$ z $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}, \rho)$ do $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ spełniająca zależności

$$H(z,0) = f(z) \ \text{ i } \ H(z,1) = g(z), \quad z \in \mathbb{T}. \tag{3.10}$$

Ponieważ $\mathbb{T} \times [0;1]$ jest zbiorem zwartym w przestrzeni $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}, \rho)$, więc H jest funkcją jednostajnie ciągłą w zbiorze $\mathbb{T} \times [0;1]$. Dlatego istnieje $\delta \in \mathbb{R}_+$ o tej własności, że

$$\rho((z',t'),(z'',t'')) < \delta \Rightarrow |H(z',t') - H(z'',t'')| < \sqrt{2}, \quad (z',t'),(z'',t'') \in \mathbb{T} \times [0;1]. \tag{3.11}$$

Przyjmując $n := 1 + \mathrm{Ent}(1/\delta)$ widzimy, że $n \in \mathbb{N}$ i $\frac{1}{n} < \delta$. Rozważmy ciąg funkcji $\mathbb{Z}_{0,n} \ni k \mapsto f_k := H(\cdot, \frac{k}{n})$. Ponieważ $H : \mathbb{T} \times [0;1] \to \mathbb{T}$, więc $f_k : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest funkcją

ciągłą dla $k \in \mathbb{Z}_{0,n}$. Z warunku (3.10) wynika, że $f_0 = f$ i $f_n = g$. Ponadto z (3.9) wynika, że $\rho\Big((z, \frac{k}{n}), (z, \frac{k-1}{n})\Big) = \frac{1}{n} < \delta$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ i $z \in \mathbb{T}$, co wobec (3.11) daje

$$|f_k(z) - f_{k-1}(z)| = \left|H\Big(z, \frac{k}{n}\Big) - H\Big(z, \frac{k-1}{n}\Big)\right| < \sqrt{2}, \quad z \in \mathbb{T}.$$

Stąd na mocy lematu 3.3, $\deg(f_{k-1}) = \deg(f_k)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Dlatego $\deg(f) = \deg(g)$, czego należało dowieść. □

Dla dowolnego zbioru $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ i funkcji $f : \Omega \to \mathbb{C}$ niech $\mathrm{R}(f, a)$ będzie zbiorem wszystkich $r \in \mathbb{R}_+$ takich, że $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \subset \Omega$ i

$$f(z) \neq f(a), \quad z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \setminus \{a\}. \tag{3.12}$$

Z określenia zbioru $\mathrm{R}(f, a)$ wynika, że funkcje

$$\mathbb{T} \ni z \mapsto f[a, r](z) := \frac{f(rz + a) - f(a)}{|f(rz + a) - f(a)|}, \quad r \in \mathrm{R}(f, a), \tag{3.13}$$

są dobrze określone, o ile $\mathrm{R}(f, a) \neq \emptyset$. Ponadto dla każdego $r \in \mathrm{R}(f, a)$, jeśli f jest funkcją ciągłą w $\mathbb{T}(a, r)$ to $f[a, r] \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$.

Wniosek 3.5. *Dla każdego zbioru niepustego $\Omega \subset \mathbb{C}$ i dowolnych $a \in \Omega$ oraz funkcji ciągłej $f : \Omega \to \mathbb{C}$, jeśli $\mathrm{R}(f, a) \neq \emptyset$ to istnieje dokładnie jedna liczba $\deg(f, a) \in \mathbb{Z}$ taka, że*

$$\deg(f, a) = \deg(f[a, r]), \quad r \in \mathrm{R}(f, a). \tag{3.14}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie Ω, a i f spełniające założenia wniosku. Z określenia zbioru $\mathrm{R}(f, a)$ wynika, że $f[a, r] \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ dla $r \in \mathrm{R}(f, a)$. Ustalmy dowolnie $r_1, r_2 \in \mathrm{R}(f, a)$ takie, że $r_1 < r_2$. Dla każdego $t \in [0; 1]$, $(r_2 - r_1)t + r_1 \in [r_1; r_2] \subset \mathrm{R}(f, a)$, a więc funkcja

$$\mathbb{T} \times [0; 1] \ni (z, t) \mapsto H(z, t) := \frac{f(((r_2 - r_1)t + r_1)z + a) - f(a)}{|f(((r_2 - r_1)t + r_1)z + a) - f(a)|} \tag{3.15}$$

jest dobrze określona i ciągła z przestrzeni $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}, \rho)$ do $\mathrm{E}(\mathbb{C})$. Ponadto $H(z, t) \in \mathbb{T}$ dla $z \in \mathbb{T}$ i $t \in [0; 1]$ oraz na mocy (3.13), $H(z, 0) = f[a, r_1](z)$ i $H(z, 1) = f[a, r_2](z)$ dla $z \in \mathbb{T}$. Dlatego $f[a, r_1] \sim f[a, r_2]$, skąd na mocy twierdzenia 3.4, $\deg(f[a, r_1]) = \deg(f[a, r_2])$. Zatem funkcja $\mathrm{R}(f, a) \ni r \mapsto \deg(f[a, r])$ jest stała. Ponadto z lematu 3.2 wynika, że $\deg(f[a, r]) \in \mathbb{Z}$ dla $r \in \mathrm{R}(f, a)$, co dowodzi wniosku. □

Definicja 3.6. Przy założeniach wniosku 3.5 liczbę $\deg(f, a)$ spełniającą warunek (3.14) nazywa się *stopniem funkcji f w punkcie a*.

Kluczowe dla dalszych rozważań jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.7. *Dla każdego zbioru niepustego* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *oraz dowolnych funkcji ciągłych* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *i* $a \in \Omega$*, jeśli* $\mathrm{R}(f, a) \neq \emptyset$*,* $f(a) = 0$ *i* $g(a) \neq 0$*, to*

$$\deg(f \cdot g, a) = \deg(f, a). \tag{3.16}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie zbiór niepusty $\Omega \subset \mathbb{C}$ oraz f, g i a spełniające założenia twierdzenia. Wtedy istnieje $r_1 \in \mathbb{R}_+$ taki, że $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r_1)) \subset \Omega$ i $f(z) \neq f(a) = 0$ dla $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r_1)) \setminus \{a\}$. Ponieważ g jest funkcją ciągłą w punkcie a i $g(a) \neq 0$, więc istnieje $r_2 \in \mathbb{R}_+$ taki, że $|g(z) - g(a)| < \frac{1}{2}|g(a)|$ dla $z \in \mathbb{D}(a, r_2) \cap \Omega$. Stąd

$$\begin{aligned}|g(z)| &= |g(a) - (g(a) - g(z))| \geqslant |g(a)| - |g(a) - g(z)| \\ &> |g(a)| - \frac{1}{2}|g(a)| = \frac{1}{2}|g(a)| > 0, \quad z \in \mathbb{D}(a, r_2) \cap \Omega.\end{aligned}$$

Przyjmując $r := \min(\{r_1, r_2\})$ widzimy, że $\mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \subset \Omega$, $f(z) \neq 0 \neq g(z)$ dla $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \setminus \{a\}$. Stąd

$$f \cdot g(z) = f(z) \cdot g(z) \neq 0 = f(a) \cdot g(a) = f \cdot g(a), \quad z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r)) \setminus \{a\},$$

i w konsekwencji $r \in \mathrm{R}(f \cdot g, a)$. Stąd na mocy wniosku 3.5,

$$\deg(f \cdot g, a) = \deg((f \cdot g)[a, r]). \tag{3.17}$$

Ponieważ $trz + a \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(a, r))$ dla $z \in \mathbb{T}$ i $t \in [0; 1]$, więc $|g(trz + a)| \geqslant \frac{1}{2}|g(a)| > 0$ dla $z \in \mathbb{T}$ i $t \in [0; 1]$. Ponadto $f(rz + a) \neq f(a) = 0$ dla $z \in \mathbb{T}$. Dlatego funkcja

$$\mathbb{T} \times [0; 1] \ni (z, t) \mapsto H(z, t) := \frac{f(rz + a)}{|f(rz + a)|} \frac{g(trz + a)}{|g(trz + a)|} \tag{3.18}$$

jest dobrze określona i ciągła z przestrzeni $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}, \rho)$ do $\mathrm{E}(\mathbb{C})$. Ponieważ $g(a)/|g(a)| \in \mathbb{T}$, więc $g(a) = |g(a)| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Ze wzoru (3.18) wynika, że $H(z, t) \in \mathbb{T}$ dla $z \in \mathbb{T}$ i $t \in [0; 1]$ oraz dla każdego $z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}H(z, 0) &= \frac{f(rz + a)}{|f(rz + a)|} \frac{g(a)}{|g(a)|} = f[a, r](z) \cdot \frac{g(a)}{|g(a)|}, \\ H(z, 1) &= \frac{f(rz + a)}{|f(rz + a)|} \frac{g(rz + a)}{|g(rz + a)|} = \frac{f \cdot g(rz + a)}{|f \cdot g(rz + a)|} = (f \cdot g)[a, r](z).\end{aligned}$$

Zatem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} f[a, r] \sim (f \cdot g)[a, r]$, skąd na mocy twierdzenia 3.4,

$$\deg\Big((f \cdot g)[a, r]\Big) = \deg\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} f[a, r]\Big). \tag{3.19}$$

Ustalając dowolnie $\varphi \in \mathrm{Log}(f[a,r])$ widzimy, że $\varphi + \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} f[a,r](\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi(t)+\alpha)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dlatego $\varphi + \alpha \in \mathrm{Log}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} f[a,r])$. Korzystając z lematu 3.2 otrzymujemy

$$\deg\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} f[a,r]\Big) = \frac{(\varphi+\alpha)(2\pi) - (\varphi+\alpha)(0)}{2\pi} = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = \deg(f[a,r]).$$

To łącznie z (3.19) daje równość $\deg\Big((f\cdot g)[a,r]\Big) = \deg(f[a,r])$. Stąd na mocy równości (3.17) i wniosku 3.5 otrzymujemy równość (3.16), czego należało dowieść. $\square$

Wniosek 3.8. *Dla każdego zbioru niepustego $\Omega \subset \mathbb{C}$ oraz dowolnych $g : \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ i $n \in \mathbb{N}$, jeśli g jest funkcją ciągłą, a jest punktem wewnętrznym zbioru Ω i $g(a) \neq 0$, to $\deg(f,a) = n$, gdzie*

$$\Omega \ni z \mapsto f(z) := (z-a)^n g(z). \tag{3.20}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie Ω, g, a i n spełniające założenia wniosku. Wtedy $\mathbb{D}(a, 2r) \subset \Omega$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}_+$. Przyjmując $\Omega \ni z \mapsto h(z) := (z-a)^n$ widzimy, że $r \in \mathrm{R}(h,a)$. Korzystając ze wzoru (3.13) mamy

$$h[a,r](z) := \frac{h(rz+a) - h(a)}{|h(rz+a) - h(a)|} = \frac{r^n z^n}{|r^n z^n|} = z^n, \quad z \in \mathbb{T}. \tag{3.21}$$

Ponieważ funkcja $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(t) := nt$ jest ciągła i wobec (3.21),

$$h[a,r](\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

więc $\varphi \in \mathrm{Log}(h[a,r])$. Stąd na mocy wniosku 3.5 i lematu 3.2,

$$\deg(h,a) = \deg(h[a,r]) = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = \frac{2\pi n}{2\pi} = n.$$

Ponieważ obie funkcje f i g są ciągłe oraz $g(a) \neq 0 = h(a)$, więc korzystając z twierdzenia 3.7 dostajemy

$$\deg(f,a) = \deg(h\cdot g, a) = \deg(h,a) = n,$$

co kończy dowód. $\square$

Związek pomiędzy stopniem funkcji w punkcie jej różniczkowalności a znakiem Jakobianu podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.9. *Dla każdego zbioru niepustego $\Omega \subset \mathbb{C}$ oraz dowolnych $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $a \in \Omega$, jeśli f jest funkcją ciągłą, a jest punktem wewnętrznym zbioru Ω, f jest funkcją różniczkowalną* (w sensie Frécheta) *w punkcie a i $\mathrm{J}[f](a) > 0$, to $\mathrm{R}(f,a) \neq \emptyset$ i $\deg(f,a) = 1$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie funkcję ciągłą $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i punkt wewnętrzny a zbioru Ω, o tej własności, że f jest różniczkowalna w a i $\mathrm{J}[f](a) > 0$. Istnieje wtedy funkcja $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taka, że

$$\mathrm{d}_a f(v) = \partial f(a) \cdot v + \bar{\partial} f(a) \cdot \overline{v}, \quad v \in \mathbb{C}, \tag{3.22}$$

$$a + v \in \Omega \Rightarrow f(a+v) - f(a) = \mathrm{d}_a f(v) + v \cdot \omega(v), \quad v \in \mathbb{C}, \tag{3.23}$$

oraz

$$\omega(v) \to 0 = \omega(0), \text{ gdy } v \to 0. \tag{3.24}$$

Ponieważ $|\partial f(a)|^2 - |\bar{\partial} f(a)|^2 = \mathrm{J}[f](a) > 0$, więc

$$c := |\partial f(a)| - |\bar{\partial} f(a)| = \frac{\mathrm{J}[f](a)}{|\partial f(a)| + |\bar{\partial} f(a)|} > 0.$$

Z (3.22) wynika, że dla każdego $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)| &= |v| \left| \partial f(a) + \bar{\partial} f(a) \frac{\overline{v}}{v} + \omega(v) \right| \\ &\geqslant |v| \big(|\partial f(a)| - |\bar{\partial} f(a)| - |\omega(v)| \big) \\ &= |v|(c - |\omega(v)|). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ponieważ a jest punktem wewnętrznym zbioru Ω, więc z (3.24) wynika istnienie $r \in \mathbb{R}_+$ o tej własności, że

$$\mathbb{D}(a, 2r) \subset \Omega \;\text{ i }\; |\omega(v)| \leqslant \frac{c}{3}, \quad v \in \mathbb{D}(0, 2r). \tag{3.26}$$

Stąd oraz z (3.23) i (3.25) mamy

$$|f(a+v) - f(a)| = |\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)| \geqslant |v|(c - |\omega(v)|) \geqslant \frac{2}{3} c|v|, \quad v \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0, r)),$$

i tym samym $f(a+v) \neq f(a)$ dla $v \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r)) \setminus \{0\}$. Dlatego $r \in \mathrm{R}(f, a)$, czyli $\mathrm{R}(f, a) \neq \emptyset$. Ustalmy dowolnie $v \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r)) \setminus \{0\}$. Z (3.26) i (3.23) wynika, że

$$\frac{f(a+v) - f(a)}{|f(a+v) - f(a)|} = \frac{\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)}{|\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)|}.$$

Stąd dla każdego $v \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}(0,r)) \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(a+v)-f(a)}{|f(a+v)-f(a)|} - \frac{\mathrm{d}_a f(v)}{|\mathrm{d}_a f(v)|}\right| &= \left|\frac{\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)}{|\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)|} - \frac{\mathrm{d}_a f(v)}{|\mathrm{d}_a f(v)|}\right| \\
&= \frac{\Big||\mathrm{d}_a f(v)| \cdot (\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)) - \mathrm{d}_a f(v) \cdot |\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)|\Big|}{|\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)||\mathrm{d}_a f(v)|} \\
&= \frac{\Big|\mathrm{d}_a f(v) \cdot (|\mathrm{d}_a f(v)| - |\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)|) + |\mathrm{d}_a f(v)| \cdot v\omega(v)\Big|}{|\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)||\mathrm{d}_a f(v)|} \\
&\leqslant \frac{|\mathrm{d}_a f(v)| \cdot \Big||\mathrm{d}_a f(v)| - |\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)|\Big| + |\mathrm{d}_a f(v)| \cdot |v\omega(v)|}{|\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)||\mathrm{d}_a f(v)|} \\
&\leqslant \frac{2|v||\omega(v)|}{|\mathrm{d}_a f(v) + v\omega(v)|}.
\end{aligned}$$

To łącznie z (3.25) i (3.26) daje

$$\Big|f[a,r](z) - \mathrm{d}_a f[a,r](z)\Big| \leqslant \frac{2|rz||\omega(rz)|}{|rz|(c - |\omega(rz)|)} = \frac{2|\omega(rz)|}{c - |\omega(rz)|} \leqslant 1 < \sqrt{2}, \quad z \in \mathbb{T},$$

skąd na mocy wniosku 3.5 i lematu 3.3,

$$\deg(f,a) = \deg(f[a,r]) = \deg(\mathrm{d}_a f[a,r]). \tag{3.27}$$

Ponieważ dla wszystkich $z \in \mathbb{T}$ i $t \in [0;1]$,

$$\begin{aligned}
|\partial f(a) \cdot z + t\bar\partial f(a) \cdot \overline{z}| &\geqslant |\partial f(a) \cdot z| - |t\bar\partial f(a) \cdot \overline{z}| \\
&= |\partial f(a)| - t|\bar\partial f(a)| \geqslant |\partial f(a)| - |\bar\partial f(a)|) = c > 0,
\end{aligned}$$

więc funkcja

$$\mathbb{T} \times [0;1] \ni (z,t) \mapsto H(z,t) := \frac{\partial f(a) \cdot z + t\bar\partial f(a) \cdot \overline{z}}{|\partial f(a) \cdot z + t\bar\partial f(a) \cdot \overline{z}|} \tag{3.28}$$

jest dobrze określona i ciągła z przestrzeni $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}, \rho)$ do $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ oraz $H(z,t) \in \mathbb{T}$ dla $z \in \mathbb{T}$ i $t \in [0;1]$. Przyjmując $\mathbb{T} \ni z \mapsto f_a(z) := \frac{\partial f(a)}{|\partial f(a)|} z$ stwierdzamy na mocy wzoru (3.28), że

$$H(z,0) = \frac{\partial f(a)}{|\partial f(a)|} z = f_a(z) = f_a[0,r](z), \quad z \in \mathbb{T}.$$

Z (3.22) mamy zaś

$$H(z,1) = \frac{\partial f(a) \cdot z + \bar\partial f(a) \cdot \overline{z}}{|\partial f(a) \cdot z + \bar\partial f(a) \cdot \overline{z}|} = \frac{\mathrm{d}_a f(rz)}{|\mathrm{d}_a f(rz)|} = \mathrm{d}_a f[a,r](z), \quad z \in \mathbb{T}.$$

Dlatego $\mathrm{d}_a f[a,r] \sim f_a[0,r]$, i wobec twierdzenia 3.4, $\deg(\mathrm{d}_a f[a,r]) = \deg(f_a[0,r])$. To łącznie z (3.27) daje na mocy wniosku 3.5 równości

$$\deg(f,a) = \deg(f_a[0,r]) = \deg(f_a,0). \tag{3.29}$$

Z wniosku 3.8 wynika, że $\deg(f_a, 0) = 1$. Stąd i z (3.29) wynika równość $\deg(f, a) = 1$, co kończy dowód. □

Wniosek 3.10. *Dla dowolnych $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ i $p \in \mathbb{D}$, $\deg(\varphi, p) = 1$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$. Z [18, Theorem 3.1, p. 128] i twierdzenia 1.9 wynika istnienie punktu $q \in \mathbb{D}$, w którym istnieje różniczka $\mathrm{d}_q\varphi$ i $\mathrm{J}[\varphi](q) > 0$. Z twierdzenia 3.9 wynika, że $\deg(\varphi, q) = 1$. Ponieważ φ jest funkcją różnowartościową, więc dla dowolnie zadanego $p \in \mathbb{D}$, $r := (1 - |p|)/2 \in \mathrm{R}(\varphi, p)$ i $|\varphi(rz + tp) - \varphi(tp)| > 0$ dla $z \in \mathbb{T}$ i $t \in [0; 1]$. Dlatego funkcja

$$\mathbb{T} \times [0; 1] \ni (z, t) \mapsto H(z, t) := \frac{\varphi(rz + tp) - \varphi(tp)}{|\varphi(rz + tp) - \varphi(tp)|} \tag{3.30}$$

jest dobrze określona i ciągła z przestrzeni $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}, \rho)$ do $\mathrm{E}(\mathbb{C})$ oraz $H(z, t) \in \mathbb{T}$ dla $z \in \mathbb{T}$ i $t \in [0; 1]$. Ponadto $H(z, 0) = \varphi[0, r](z)$ i $H(z, 1) = \varphi[p, r](z)$ dla $z \in \mathbb{T}$. Zatem $\varphi[0, r] \sim \varphi[p, r]$. Korzystając z twierdzenia 3.4 i wniosku 3.5 stwierdzamy, że

$$\deg(\varphi, 0) = \deg(\varphi[0, r]) = \deg(\varphi[p, r]) = \deg(\varphi, p), \quad p \in \mathbb{D}.$$

W szczególności, $\deg(\varphi, 0) = \deg(\varphi, q) = 1$. W konsekwencji, $\deg(\varphi, p) = 1$ dla $p \in \mathbb{D}$, co kończy dowód. □

3.2 Wariant twierdzenia Fatou dla skończonych iloczynów Blaschkego

Przypomnijmy, że przez *skończony iloczyn Blaschkego* rozumiemy funkcję $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ spełniającą warunek

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a \in A} \left(\frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right)^{d_a}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.31}$$

dla pewnego skończonego zbioru niepustego $A \subset \mathbb{D}$, pewnej funkcji $d : A \to \mathbb{N}$ i pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, gdzie $d_a := d(a)$ dla $a \in A$. Z wniosku 3.8 wynika, że

$$\sum_{a \in A} \deg(f, a) = \sum_{a \in A} d_a. \tag{3.32}$$

Ostatnia suma nazywana jest *stopniem skończonego iloczynu Blaschkego f*. Z warunku (3.31) wynika, że każdy skończony iloczyn Blaschkego f jest funkcją holomorficzną w kole jednostkowym $\mathbb{D}$ spełniającą warunek

$$f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \ \text{ i } \lim_{\mathbb{D} \ni u \to z} f(u) \in \mathbb{T}, \quad z \in \mathbb{T}. \tag{3.33}$$

Fatou wykazał w [10], że *dla każdej funkcji* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$*,* f *jest skończonym iloczynem Blaschkego wtedy i tylko wtedy, gdy* $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ *i* $|f(z)| \to 1$*, gdy* $|z| \to 1$ *dla* $z \in \mathbb{D}$. Wykażemy mocniejszy wariant tego twierdzenia.

Oznaczmy przez $\mathrm{CS}(f; z)$ zbiór wszystkich punktów skupienia funkcji $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ w punkcie $z \in \mathbb{T}$, tzn. zbiór wszystkich $w \in \hat{\mathbb{C}}$, dla których istnieje ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in \mathbb{D}$ taki, że

$$z_n \to z \ \text{ i } \ f(z_n) \to w \text{ w } \mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}}), \quad \text{gdy } n \to +\infty. \tag{3.34}$$

Ponadto przyjmujemy,

$$\mathrm{CS}(f) := \bigcup_{z \in \mathbb{T}} \mathrm{CS}(f; z). \tag{3.35}$$

Lemat 3.11. *Dla każdej funkcji* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$*,* f *jest skończonym iloczynem Blaschkego wtedy i tylko wtedy, gdy* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$*,* $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$ *i* $|f(0)| \neq 1$*.*

Dowód. Ustalając dowolnie funkcję $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ załóżmy, że $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$ i $|f(0)| \neq 1$. Przypuśćmy, że zbiór $A := f^{-1}(\{0\})$ nie jest skończony. Ponieważ koło domknięte $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ jest zbiorem zwartym, więc istnieją ciąg różnowartościowy $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in A$ i $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ takie, że $z_n \to z$, gdy $n \to +\infty$. Jeśli $z \in \mathbb{D}$ to zbiór punktów skupienia miejsc zerowych funkcji holomorficznej f ma punkt skupienia z w kole $\mathbb{D}$, skąd $f(\mathbb{D}) = \{0\}$; por. np. [29, Chap. 15]. Wtedy $\mathrm{CS}(f) = \{0\}$, co przeczy inkluzji $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$. Dlatego $z \in \mathbb{T}$. Ponieważ $f(z_n) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $f(z_n) \to 0$, gdy $n \to +\infty$. Stąd $0 \in \mathrm{CS}(f; z) \subset \mathrm{CS}(f)$, co ponownie przeczy inkluzji $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$. Zatem A jest zbiorem skończonym i mogą zajść dwa przypadki: $A = \emptyset$ albo $A \neq \emptyset$.

Załóżmy najpierw, że $A = \emptyset$. Wtedy $f(z) \neq 0$ dla $z \in \mathbb{D}$, a więc $1/f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Z zasady maksimum dla funkcji holomorficznych wynika istnienie ciągu $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in \mathbb{T}(0, 1 - \frac{1}{n})$ takiego, że

$$|f(u)| \leqslant |f(z_n)|, \quad n \in \mathbb{N}, u \in \mathrm{cl}\Big(\mathbb{D}\Big(0, 1 - \frac{1}{n}\Big)\Big). \tag{3.36}$$

Ze zwartości zbiorów $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i $\hat{\mathbb{C}}$ w $\mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}})$ wynika istnienie ciągu rosnącego $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ oraz $z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i $w \in \hat{\mathbb{C}}$ takich, że $z_{n_k} \to z$ oraz $f(z_{n_k}) \to w$ w $\mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}})$, gdy $k \to +\infty$. Ponieważ $|z_{n_k}| = 1 - \frac{1}{n_k} \to 1$ i $|z_{n_k}| \to |z|$, gdy $k \to +\infty$, więc $|z| = 1$, czyli $z \in \mathbb{T}$. Dlatego

$$w \in \mathrm{CS}(f; z) \subset \mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T},$$

i w konsekwencji $|f(z_{n_k})| \to |w| = 1$, gdy $k \to +\infty$. Z (3.36) wynika, że $|f(z_{n_k})| \leqslant |f(z_{n_{k+1}})|$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zatem $|f(z_{n_k})| \leqslant 1$ dla $k \in \mathbb{N}$, co łącznie z (3.36) daje

$$|f(u)| \leqslant 1, \quad u \in \mathbb{D}. \tag{3.37}$$

Ponieważ $1/f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ i $\mathrm{CS}(1/f) \subset \mathbb{T}$, więc możemy powyższe rozumowanie zastosować do funkcji $1/f$ w miejsce funkcji f. W rezultacie, $\frac{1}{|f(u)|} = |(1/f)(u)| \leqslant 1$ dla $u \in \mathbb{D}$. To łącznie z (3.37)) daje $|f(u)| = 1$ dla $u \in \mathbb{D}$, a więc istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ taki, że

$$f(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \quad u \in \mathbb{D}. \tag{3.38}$$

To jednak przeczy założeniu $|f(0)| \neq 1$, a to oznacza, że równość $A = \emptyset$ nie zachodzi.

Załóżmy teraz, że $A \neq \emptyset$. Ponieważ A jest zbiorem skończonym, więc istnieją funkcje $d : A \to \mathbb{N}$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ takie, że $0 \notin g(\mathbb{D})$ i

$$f(u) = g(u) \prod_{a \in A} \left(\frac{u - a}{1 - \overline{a}u} \right)^{d_a}, \quad u \in \mathbb{D}. \tag{3.39}$$

Dla dowolnie ustalonych $z \in \mathbb{T}$ i $w \in \mathrm{CS}(g; z)$ istnieje ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in \mathbb{D}$ taki, że

$$z_n \to z \ \text{ i } \ g(z_n) \to w \ \text{ w } \ \mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}}), \quad \text{gdy } n \to +\infty.$$

Ponieważ

$$\prod_{a \in A} \left(\frac{z_n - a}{1 - \overline{a}z_n} \right)^{d_a} \to w_0 := \prod_{a \in A} \left(\frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right)^{d_a}, \quad \text{gdy } n \to +\infty,$$

więc $ww_0 \in \mathrm{CS}(f; z)$. Stąd na mocy założenia $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$, $|ww_0| = 1$. Ponadto $|w_0| = 1$, gdyż $|(z - a)/(1 - \overline{a}z)| = 1$ dla $a \in A$. Dlatego $w \in \mathbb{T}$, co dowodzi inkluzji $\mathrm{CS}(g) \subset \mathbb{T}$. Jednocześnie $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, więc zachodzi równość (3.38) z $f := g$. Zatem funkcja f spełnia warunek (3.39), i tym samym f jest skończonym iloczynem Blaschkego. To dowodzi lematu w stronę ($\Leftarrow$).

Na odwrót, załóżmy, że f jest skończonym iloczynem Blaschkego. Wówczas zachodzi warunek (3.31) dla pewnego skończonego zbioru niepustego $A \subset \mathbb{D}$ oraz pewnych $d : A \to \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Stąd $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ i dla każdego ciągu $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in \mathbb{D}$ i każdego $z \in \mathbb{T}$, jeśli $z_n \to z$, gdy $n \to +\infty$, to

$$\lim_{n \to +\infty} f(z_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a \in A} \left(\frac{z_n - a}{1 - \overline{a}z_n} \right)^{d_a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a \in A} \left(\frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right)^{d_a} \in \mathbb{T}.$$

Dlatego $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$. Ponadto z warunku (3.31) mamy $|f(0)| = \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a \in A} (-a)^{d_a} \right| < 1$, co dowodzi lematu w stronę ($\Rightarrow$).

Obie implikacje dają łącznie równoważność, co kończy dowód. □

3.3 Quasiregularny odpowiednik twierdzenia Fatou

Nawiązując do twierdzenia 3.1 wykażemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.12. *Dla dowolnych $K \in [1;+\infty)$ i $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D};K)$, jeśli $|f(0)| \neq 1$ i $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$, to istnieją $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$ i skończony iloczyn Blaschkego g takie, że $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$ i $f = g \circ \varphi$. Ponadto $A := f^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem skończonym, $\deg(f,a) \in \mathbb{N}$ dla $a \in A$ i istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ o tej własności, że*

$$g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a\in A} \left(\frac{z - \varphi(a)}{1 - \overline{\varphi(a)} z} \right)^{\deg(f,a)}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.40}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $K \in [1;+\infty)$ i $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D};K)$ spełniające założenia twierdzenia. Wtedy istnieją $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$ i $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ spełniające równości $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$ i $f = g \circ \varphi$; por. (3.4) i (3.6). Pozostaje wykazać, że g jest skończonym iloczynem Blaschkego. Z uwagi 2.19 wynika, że odwzorowanie φ ma rozszerzenie do homeomorfizmu φ^* koła $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie, a w szczególności $\varphi^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

Wykażemy, że $\mathrm{CS}(g) \subset \mathbb{T}$. Ustalając dowolnie $w \in \mathrm{CS}(g)$ widzimy, że $w \in \mathrm{CS}(g;z)$ dla pewnego $z \in \mathbb{T}$. Istnieje więc ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in \mathbb{D}$ taki, że

$$z_n \to z \ \text{ i } \ g(z_n) \to w \ \text{w} \ \mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}}), \quad \text{gdy } n \to +\infty.$$

Stąd $\varphi^{-1}(z_n) \to (\varphi^*)^{-1}(z) \in \mathbb{T}$, gdy $n \to +\infty$, i w konsekwencji

$$f(\varphi^{-1}(z_n)) = f \circ \varphi^{-1}(z_n) = g(z_n) \to w \ \text{w} \ \mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}}), \quad \text{gdy } n \to +\infty.$$

Dlatego $w \in \mathrm{CS}(f;(\varphi^*)^{-1}(z))$, i tym samym $w \in \mathrm{CS}(f)$. W konsekwencji $\mathrm{CS}(g) \subset \mathrm{CS}(f)$, skąd na mocy inkluzji $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$ otrzymujemy inkluzję $\mathrm{CS}(g) \subset \mathbb{T}$. Ponieważ $|g(0)| = |f \circ \varphi^{-1}(0)| = |f(0)| \neq 1$, więc na mocy lematu 3.11, g jest skończonym iloczynem Blaschkego. Istnieją zatem $\alpha \in \mathbb{R}$, skończony zbiór niepusty $B \subset \mathbb{D}$ i funkcja $d : B \to \mathbb{N}$ takie, że

$$g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{b\in B} \left(\frac{z - b}{1 - \bar{b} z} \right)^{d_b}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.41}$$

gdzie $d_b := d(b)$ dla $b \in B$. Ponieważ φ jest bijekcją koła $\mathbb{D}$ na siebie i

$$A = f^{-1}(\{0\}) = (g \circ \varphi)^{-1}(\{0\}) = \varphi^{-1}(g^{-1}(\{0\})) = \varphi^{-1}(B),$$

więc

$$f(z) = g \circ \varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a\in A} \left(\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{1 - \overline{\varphi(a)} \varphi(z)} \right)^{d_{\varphi(a)}}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.42}$$

Ustalmy dowolnie $a \in A$. Korzystając z twierdzenia 3.7 wnioskujemy, że $\deg(f,a) = \deg(h,a)$, gdzie

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto h(z) := (\varphi(z) - \varphi(a))^{d_{\varphi(a)}}.$$

Ponieważ φ jest funkcją ciągłą i $\varphi(z) \neq \varphi(a)$ dla $z \in \mathbb{D} \setminus \{a\}$, więc istnieje $r \in \mathrm{R}(h, a)$. Ponadto dla każdego $z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} h[a,r](z) &= \frac{h(rz+a) - h(a)}{|h(rz+a) - h(a)|} = \frac{(\varphi(rz+a) - \varphi(a))^{d_{\varphi(a)}}}{\left|(\varphi(rz+a) - \varphi(a))^{d_{\varphi(a)}}\right|} \\ &= \left(\frac{\varphi(rz+a) - \varphi(a)}{|\varphi(rz+a) - \varphi(a)|}\right)^{d_{\varphi(a)}} = \Big(\varphi[a,r](z)\Big)^{d_{\varphi(a)}}. \end{aligned}$$

Ustalając dowolnie $\sigma \in \mathrm{Log}(\varphi[a,r])$ widzimy, że

$$h[a,r](\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \Big(\varphi[a,r](\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\Big)^{d_{\varphi(a)}} = \Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(t)}\Big)^{d_{\varphi(a)}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}d_{\varphi(a)}\cdot\sigma(t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a więc $d_{\varphi(a)} \cdot \sigma \in \mathrm{Log}(h[a,r])$. Korzystając z wniosku 3.5 i lematu 3.2 dostajemy

$$\begin{aligned} \deg(h,a) = \deg(h[a,r]) &= \frac{d_{\varphi(a)} \cdot \sigma(2\pi) - d_{\varphi(a)} \cdot \sigma(0)}{2\pi} \\ &= d_{\varphi(a)} \cdot \frac{\sigma(2\pi) - \sigma(0)}{2\pi} = d_{\varphi(a)} \deg(\varphi, a). \end{aligned}$$

Stąd i z równości $\deg(f,a) = \deg(h,a)$ wnioskujemy na podstawie wniosku 3.10, że $\deg(f,a) = d_{\varphi(a)}$ dla $a \in A$. To łącznie z (3.41) daje własność (3.40), gdyż $\varphi(A) = B$ i φ jest funkcja różnowartościową, co kończy dowód. □

Z twierdzenia 3.12 natychmiast wynikają następujące wnioski.

Wniosek 3.13. *Dla każdego $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$, jeśli $|f(0)| \neq 1$ i $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$, to $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie funkcję $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ spełniającą założenia wniosku. Z twierdzenia 3.12 wynika istnienie odwzorowania $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ oraz skończonego iloczynu Blaschkego g takich, że $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$ i $f = g \circ \varphi$. Ponieważ g jest skończonym iloczynem Blaschkego, więc na mocy twierdzenia Rouchégo, $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Zatem

$$f(\mathbb{D}) = g \circ \varphi(\mathbb{D}) = g(\varphi(\mathbb{D})) = g(\mathbb{D}) = \mathbb{D},$$

co kończy dowód. □

Wniosek 3.14. *Dla każdego $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ spełniającego warunek $|f(0)| \neq 1$, $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f ma ciągłe rozszerzenie $f^* : \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ i $f^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ o tej własności, że $|f(0)| \neq 1$. Załóżmy, że $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$. Wówczas z twierdzenia 3.12 wynika, że istnieją $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ oraz skończony iloczyn Blaschkego g spełniające równości $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$ i $f = g \circ \varphi$. Z uwagi 2.19 wynika, że odwzorowanie φ ma rozszerzenie do homeomorfizmu φ^* koła $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie, a w szczególności $\varphi^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Ponadto na mocy (3.40), g ma ciągłe rozszerzenie g^* na

$\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ i $g^*(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$, a to implikuje równość $g^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. W konsekwencji funkcja $f = g \circ \varphi$ ma ciągłe rozszerzenie $f^* = g^* \circ \varphi^*$ na $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ oraz

$$f^*(\mathbb{T}) = g^* \circ \varphi^*(\mathbb{T}) = g^*(\varphi^*(\mathbb{T})) = g^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T},$$

co dowodzi wniosku w stronę ($\Rightarrow$). Na odwrót, załóżmy, że funkcja f ma ciągłe rozszerzenie $f^* : \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ i $f^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Wtedy $\mathrm{CS}(f) = f^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, co dowodzi wniosku w stronę ($\Leftarrow$), i tym samym kończy dowód. $\square$

Rozdział 4

Uogólnienia twierdzeń Krzyża na zespolone odwzorowania quasiregularne koła jednostkowego

Wzorując się na klasycznym warunku quasisymetrii (4.4) Krzyż wprowadził w 1987 roku pojęcie *M-quasisymetrycznego automorfizmu okręgu jednostkowego* jako zachowującego orientację homeomorfizmu f okręgu $\mathbb{T}$ na siebie (tzn. $\deg(f) > 0$) spełniającego nierówność

$$\frac{1}{M} \leqslant \frac{|f(I_1)|_1}{|f(I_2)|_1} \leqslant M \tag{4.1}$$

dla każdej pary łuków domkniętych $I_1, I_2 \subset \mathbb{T}$ o jednakowej długości $|I_1|_1 = |I_2|_1$ i mających jeden lub dwa punkty wspólne; por. [16]. Niech $\mathrm{QS}(\mathbb{T}; M)$ oznacza rodzinę wszystkich M-quasisymetrycznych automorfizmów okręgu $\mathbb{T}$ dla $M \in [1; +\infty)$. Przez analogię do brzegowej charakteryzacji Beurlinga-Ahlforsa odwzorowań quasikonforemnych górnej półpłaszczyzny $\mathbb{C}_+$ na siebie, Krzyż wykazał następujące dwa twierdzenia; por. [16].

Twierdzenie 4.1. *Dla dowolnych $K \in [1; +\infty)$ i $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$, jeśli $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ i $f(0) = 0$ to f ma rozszerzenie do homeomorfizmu f^* koła $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie o tej własności, że $f^*|_{\mathbb{T}} \in \mathrm{QS}(\mathbb{T}; \lambda(K))$, gdzie*

$$\lambda(K) := \Phi_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Phi_{\frac{1}{K}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}. \tag{4.2}$$

Twierdzenie 4.2. *Dla dowolnych $M \in [1; +\infty)$ i $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{T}; M)$ istnieje odwzorowanie $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; M^2)$ takie, że $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $f(0) = 0$ i $f^*|_{\mathbb{T}} = g$, gdzie f^* jest ciągłym rozszerzeniem odwzorowania f na koło $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$.*

Celem rozważań w tym rozdziale jest rozszerzenie twierdzeń 4.1 i 4.2 na zespolone odwzorowania quasiregularne koła $\mathbb{D}$ spełniające pewne warunki brzegowe.

4.1 Quasiregularny odpowiednik pierwszego twierdzenia Krzyża

Istotną rolę w dowodzie twierdzenia 4.4 odgrywa następujący lemat.

Lemat 4.3. *Dla dowolnych* $K \in [1; +\infty)$ *i* $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$, *jeśli* $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ *i* $f(0) = 0$ *to dla każdego* $\varphi \in \mathrm{Log}(f|_A)$, $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{C}_+; K)$ *i* $\varphi(\mathbb{C}_+) = \mathbb{C}_+$, *gdzie* $A := \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Dowód. Ustalmy dowolnie K i f spełniające założenia lematu. Z uwagi 2.19 wynika, że odwzorowanie f ma rozszerzenie do homeomorfizmu f^* koła domkniętego $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie. Stąd na mocy twierdzenia 2.8 istnieje $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Log}(f^*|_{\tilde{A}})$, gdzie $\tilde{A} := \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$. Korzystając z wniosku 2.12 widzimy, że $\tilde{\varphi}$ jest homeomorfizmem zbioru $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+) = \mathrm{Ei}(\tilde{A})$ na siebie. Zatem obcięcie $\tilde{\varphi}|_{\mathbb{C}_+}$ jest homeomorfizmem górnej półpłaszczyzny $\mathbb{C}_+$ na siebie. Z lematu 2.3 wynika, że dowolnie zadany $\varphi \in \mathrm{Log}(f|_A)$ jest również homeomorfizmem górnej półpłaszczyzny $\mathbb{C}_+$ na siebie. Co więcej, biorąc pod uwagę reprezentację (2.53), założenie $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$ i własności (2.56) widzimy, że dla każdego $p \in \mathbb{C}_+$ istnieje $r_p \in \mathbb{R}_+$ o własnościach $\mathbb{D}(p, r_p) \subset \mathbb{C}_+$ i $\varphi|_{\mathbb{D}(p,r_p)} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}(p, r_p); K)$. Innymi słowy φ jest odwzorowaniem lokalnie K-quasikonforemnym jako złożenie odwzorowania K-quasikonforemnego f z odwzorowaniami konforemnymi. Ponieważ φ jest homeomorfizmem zbioru $\mathbb{C}_+$ na siebie, więc $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{C}_+; K)$; por. [18, Theorem 9.1, p. 48], [1, Theorem 1, Chap. II, Sec. A]. Ponadto $\varphi(\mathbb{C}_+) = \mathbb{C}_+$, co kończy dowód. □

Dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ rozważmy klasę $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}; a)$ złożoną ze wszystkich homeomorfizmów zbioru $\mathbb{R}$ na siebie spełniających warunek

$$f(t + 2\pi) = f(t) + 2\pi a, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Jeśli $a > 0$, to f jest funkcją rosnącą. Jeśli zaś $a < 0$, to f jest funkcją malejącą. Przypomnijmy, że dla każdego $M \in [1; +\infty)$ funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywa się *funkcją* M*-quasisymetryczną na* $\mathbb{R}$ $:\Leftrightarrow$ f jest rosnącą funkcją ciągłą spełniającą następujący *warunek* M*-quasisymetrii Beurlinga-Ahlforsa*:

$$\frac{1}{M} \leqslant \frac{f(x+y) - f(x)}{f(x) - f(x-y)} \leqslant M, \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}_+; \tag{4.4}$$

por. [4], [1, Theorem 1, Chap. IV, Sec. A] i [18, Theorem 6.2, p. 81]. Rodzinę wszystkich funkcji M-quasisymetrycznych na $\mathbb{R}$ będziemy oznaczać przez $\mathrm{QS}(\mathbb{R}; M)$ dla $M \in [1; +\infty)$.

Twierdzenie 4.4. *Dla dowolnych* $K \in [1; +\infty)$ *i* $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D}; K)$*, jeśli* $|f(0)| \neq 1$ *i* $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$*, to* f *ma ciągłe rozszerzenie* f^* *na* $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$*,* $A := f^{-1}(\{0\})$ *jest niepustym zbiorem skończonym,* $\deg(f, a) \in \mathbb{N}$ *dla* $a \in A$ *oraz istnieją* $M \in [1; +\infty)$ *i* $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; m) \cap \mathrm{QS}(\mathbb{R}; \lambda(K)M^2)$ *takie, że*

$$f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

oraz

$$M \leqslant \frac{1 + \Phi_K(r)}{1 - \Phi_K(r)}, \tag{4.6}$$

gdzie $r := \max(\{|a| : a \in A\})$*,* $m := \sum_{a \in A} \deg(f, a)$ *i* $\lambda(K)$ *jest określone wzorem* (4.2)*.*

Dowód. Ustalmy dowolnie K i f spełniające założenia twierdzenia. Z twierdzenia 3.12 wynika, że istnieją $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$ i skończony iloczyn Blaschkego g takie, że $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$ oraz

$$f(z) = g \circ \varphi(z), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.7}$$

Ponadto $A := f^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem skończonym, $\deg(f, a) \in \mathbb{N}$ dla $a \in A$ i zachodzi równość (3.40) dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Z uwagi 2.19 wynika, że φ ma rozszerzenie do homeomorfizmu φ^* koła domkniętego $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie. Stosując twierdzenie 2.8 i wniosek 2.12 stwierdzamy istnienie homeomorfizmu $\mathit{\Phi}^*$ górnej półpłaszczyzny domkniętej $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ na siebie takiego, że $\mathit{\Phi}^* \in \mathrm{Log}(\varphi^*)$, skąd

$$\varphi^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathit{\Phi}^*(z)}, \quad z \in \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+). \tag{4.8}$$

Z lematu 4.3 wynika więc, że $\mathit{\Phi}^*|_{\mathbb{C}_+} \in \mathrm{QC}(\mathbb{C}_+; K)$. Dlatego

$$\sigma := \mathit{\Phi}^*|_{\mathbb{R}} \in \mathrm{QS}(\mathbb{R}; \lambda(K)), \tag{4.9}$$

co jest konsekwencją twierdzenia Beurlinga-Ahlforsa; por. [4], [1, Theorem 1, Chap. IV, Sec. A] i [18, Theorem 6.2, p. 81]. Ponieważ $\varphi^*(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, więc z (4.8) wynika, że $\sigma \in \mathrm{Log}(\varphi^*|_{\mathbb{T}})$. Korzystając z lematu 3.2, wniosku 3.5 i wniosku 3.10 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(t + 2\pi) - \sigma(t)}{2\pi} &= \deg(\varphi^*|_{\mathbb{T}}) = \deg(\varphi^*[0, 1]) \\ &= \deg(\varphi^*[0, 1/2]) = \deg(\varphi[0, 1/2]) = \deg(\varphi, 0) = 1, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{4.10}$$

skąd $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; 1)$. Przyjmując

$$\mathrm{cl}(\mathbb{D}) \ni z \mapsto g_a(z) := \frac{z - \varphi(a)}{1 - \overline{\varphi(a)}z}, \quad a \in A, \tag{4.11}$$

możemy zależność (3.40) wyrazić w postaci

$$g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a\in A} (g_a(z))^{d_a}, \quad z \in \mathrm{cl}(\mathbb{D}), \tag{4.12}$$

gdzie $d_a := \deg(f, a)$ dla $a \in A$. Ustalmy dowolnie $a \in A$. Ponieważ $g_a|_{\mathbb{T}}$ jest odwzorowaniem ciągłym okręgu $\mathbb{T}$ na siebie, więc istnieje $\gamma_a \in \mathrm{Log}(g_a|_{\mathbb{T}})$. Dlatego

$$g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_a(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Ponadto ze wzoru (4.11) wynika, że γ_a jest funkcją gładką. Zatem

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_a(t)} \cdot \gamma_a'(t) = g_a'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

i wobec (4.11),

$$|\gamma_a'(t)| = |g_a'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| = \frac{1 - |\varphi(a)|^2}{|1 - \overline{\varphi(a)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dlatego

$$\frac{1 - |\varphi(a)|}{1 + |\varphi(a)|} \leqslant |\gamma_a'(t)| \leqslant \frac{1 + |\varphi(a)|}{1 - |\varphi(a)|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Ze wzoru (4.11) wynika, że $g_a|_{\mathbb{D}} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; 1)$ i $1 \in \mathrm{R}(g_a, 0)$. Korzystając ponownie z lematu 3.2, wniosku 3.5 i wniosku 3.10 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_a(t + 2\pi) - \gamma_a(t)}{2\pi} &= \deg(g_a|_{\mathbb{T}}) = \deg(g_a[0, 1]) = \deg(g_a[0, 1/2]) \\ &= \deg(g_a|_{\mathbb{D}}[0, 1/2]) = \deg(g_a|_{\mathbb{D}}, 0) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ponieważ γ_a' jest funkcją ciągłą, więc z zasady Darboux i (4.14) wnioskujemy, że $\gamma_a'(t) > 0$ dla $t \in \mathbb{R}$ albo $\gamma_a'(t) < 0$ dla $t \in \mathbb{R}$. W drugim przypadku

$$2\pi = \gamma_a(2\pi) - \gamma_a(0) = \int_0^{2\pi} \gamma_a'(t)\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

co jest niemożliwe. Dlatego $\gamma_a'(t) > 0$ dla $t \in \mathbb{R}$, i zgodnie z (4.15), $\gamma_a \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; 1)$ dla $a \in A$. Definiując więc $\gamma := \alpha + \sum_{a\in A} d_a\gamma_a$ widzimy, że γ jest homeomorfizmem rosnącym prostej $\mathbb{R}$ na siebie i

$$\gamma(t + 2\pi) - \gamma(t) = \sum_{a\in A} d_a\Big(\gamma_a(t + 2\pi) - \gamma_a(t)\Big) = \sum_{a\in A} 2\pi d_a = 2\pi m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.16}$$

czyli $\gamma \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; m)$. Ponieważ $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; 1)$, więc $h := \gamma \circ \sigma$ jest homeomorfizmem rosnącym prostej $\mathbb{R}$ na siebie. Ponadto z (4.16) dostajemy dla każdego $t \in \mathbb{R}$,

$$h(t + 2\pi) - h(t) = \gamma(\sigma(t + 2\pi)) - \gamma(\sigma(t)) = \gamma(\sigma(t) + 2\pi) - \gamma(\sigma(t)) = 2\pi m.$$

Zatem

$$h \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}; m). \tag{4.17}$$

Ponieważ $\gamma_a'(t) > 0$ dla $t \in \mathbb{R}$, więc na mocy (4.14),

$$M_a^{-1} \leqslant \gamma_a'(t) \leqslant M_a, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.18}$$

gdzie $M_a := (1+|\varphi(a)|)(1-|\varphi(a)|)^{-1}$. Przyjmując $M := \max(\{M_a : a \in A\})$ stwierdzamy na mocy (4.18), że dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
h(x+y) - h(x) &= \gamma \circ \sigma(x+y) - \gamma \circ \sigma(x) = \gamma(\sigma(x+y)) - \gamma(\sigma(x)) \\
&= \sum_{a \in A} d_a \Big(\gamma_a(\sigma(x+y)) - \gamma_a(\sigma(x)) \Big) \\
&= \sum_{a \in A} d_a \int_{\sigma(x)}^{\sigma(x+y)} \gamma_a'(t) \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{a \in A} d_a \int_{\sigma(x)}^{\sigma(x+y)} M_a \mathrm{d}t \\
&= \sum_{a \in A} d_a M_a (\sigma(x+y) - \sigma(x)) \\
&\leqslant M(\sigma(x+y) - \sigma(x)) \cdot \sum_{a \in A} d_a \\
&= Mm(\sigma(x+y) - \sigma(x))
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
h(x) - h(x-y) &= \gamma \circ \sigma(x) - \gamma \circ \sigma(x-y) = \gamma(\sigma(x)) - \gamma(\sigma(x-y)) \\
&= \sum_{a \in A} d_a \Big(\gamma_a(\sigma(x)) - \gamma_a(\sigma(x-y)) \Big) \\
&= \sum_{a \in A} d_a \int_{\sigma(x-y)}^{\sigma(x)} \gamma_a'(t) \mathrm{d}t \\
&\geqslant \sum_{a \in A} d_a \int_{\sigma(x-y)}^{\sigma(x)} M_a^{-1} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{a \in A} d_a M_a^{-1} (\sigma(x) - \sigma(x-y)) \\
&\geqslant M^{-1}(\sigma(x) - \sigma(x-y)) \cdot \sum_{a \in A} d_a \\
&= M^{-1} m(\sigma(x) - \sigma(x-y)).
\end{aligned}$$

Stąd na mocy (4.9),

$$\frac{h(x+y) - h(x)}{h(x) - h(x-y)} \leqslant \frac{Mm(\sigma(x+y) - \sigma(x))}{M^{-1}m(\sigma(x) - \sigma(x-y))} \leqslant M^2 \lambda(K), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+. \tag{4.19}$$

Podobnie, dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}_+$ wnioskujemy z (4.18), że

$$h(x+y) - h(x) \geqslant \sum_{a\in A} \frac{d_a}{M_a}(\sigma(x+y) - \sigma(x)) \geqslant \frac{m}{M}(\sigma(x+y) - \sigma(x))$$

oraz

$$h(x) - h(x-y) \leqslant \sum_{a\in A} d_a M_a(\sigma(x) - \sigma(x-y)) \leqslant Mm(\sigma(x) - \sigma(x-y)).$$

Stąd na mocy (4.9),

$$\frac{h(x+y)-h(x)}{h(x)-h(x-y)} \geqslant \frac{M^{-1}m(\sigma(x+y)-\sigma(x))}{Mm(\sigma(x)-\sigma(x-y))} \geqslant \frac{1}{M^2\lambda(K)}, \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}_+.$$

To łącznie z (4.19) daje $h \in \mathrm{QS}(\mathbb{R}; \lambda(K)M^2)$. Uwzględniając dodatkowo (4.17) dostajemy

$$h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; m) \cap \mathrm{QS}(\mathbb{R}; \lambda(K)M^2). \tag{4.20}$$

Z (4.12) i (4.13) wynika, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$,

$$g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a\in A} (g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}))^{d_a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \prod_{a\in A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}d_a\gamma_a(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\alpha+\sum_{a\in A} d_a\gamma_a(t)]} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma(t)},$$

i w konsekwencji

$$g\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(t)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma(\sigma(t))} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

Z (4.8) mamy

$$\varphi^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi^*(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.22}$$

Łącząc (4.21) z (4.22) dostajemy

$$g \circ \varphi^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(t)}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z drugiej strony z równości (4.7) wyprowadzamy dla każdego $t \in \mathbb{R}$,

$$f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \lim_{\mathbb{D}\ni z\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} f(z) = \lim_{\mathbb{D}\ni z\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} g\circ\varphi(z) = g(\varphi^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})) = g\circ\varphi^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}).$$

Dlatego

$$f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

Ponieważ $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$ i $\varphi(0) = 0$, więc na mocy twierdzenia 2.17 widzimy, że $|\varphi(a)| \leqslant \Phi_K(|a|) \leqslant \Phi_K(r)$ dla $a \in A$. Dlatego

$$M_a = \frac{1+|\varphi(a)|}{1-|\varphi(a)|} \leqslant \frac{1+\Phi_K(r)}{1-\Phi_K(r)}, \quad a \in A.$$

W konsekwencji

$$M = \max(\{M_a : a \in A\}) \leqslant \frac{1+\Phi_K(r)}{1-\Phi_K(r)}.$$

To łącznie z (4.20) i (4.23) daje tezę twierdzenia. □

Uwaga 4.5. Z twierdzenia 4.4 wynika w szczególności twierdzenie 4.1. Ustalmy bowiem dowolnie $K \in [1;+\infty)$ i $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$ takie, że $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ i $f(0) = 0$. Ponieważ $\mathrm{QC}(\mathbb{D};K) \subset \mathrm{QR}(\mathbb{D};K)$, więc na mocy uwagi 2.19, f ma rozszerzenie do homeomorfizmu f^* koła $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie, i w konsekwencji $\mathrm{CS}(f) = \mathbb{T}$. Z twierdzenia 4.4 wynika zatem, że $A := f^{-1}(\{0\})$ jest niepustym zbiorem skończonym, $\deg(f,a) \in \mathbb{N}$ dla $a \in A$ oraz istnieją $M \in [1;+\infty)$ i $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R};m) \cap \mathrm{QS}(\mathbb{R};\lambda(K)M^2)$ spełniające warunki (4.5) i (4.6), gdzie $r := \max(\{|a| : a \in A\})$ i $m := \sum_{a\in A}\deg(f,a)$. Ponieważ $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$, $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ i $f(0) = 0$, więc $A = \{0\}$ i, na podstawie wniosku 3.10, $\deg(f,0) = 1$. Dlatego $r = 0$ i $m = 1$. Z (4.6) wynika, że $M \leqslant 1$, a więc $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R};1) \cap \mathrm{QS}(\mathbb{R};\lambda(K))$ Ponadto dla każdej pary łuków domkniętych $I_1, I_2 \subset \mathbb{T}$ o jednakowej długości $|I_1|_1 = |I_2|_1$ i mających jeden lub dwa punkty wspólne istnieją $x \in \mathbb{R}$ i $y \in (0;\pi]$ takie, że $I_1 = \{e^{it} : t \in [x;x+y]\}$ i $I_2 = \{e^{it} : t \in [x-y;x]\}$, skąd na podstawie (4.5),

$$\frac{|f^*(I_1)|_1}{|f^*(I_2)|_1} = \frac{h(x+y)-h(x)}{h(x)-h(x-y)}. \tag{4.24}$$

Ponieważ $h \in \mathrm{QS}(\mathbb{R};\lambda(K))$, więc $f^*|_{\mathbb{T}} \in \mathrm{QS}(\mathbb{T};\lambda(K))$, co daje tezę twierdzenia 4.1.

4.2 Quasiregularny odpowiednik drugiego twierdzenia Krzyża

Niech $A \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem radialnym i niech $\Phi : \mathrm{Ei}(A) \to \mathbb{C}$ będzie funkcją spełniającą warunek

$$\Phi(u+2\pi) = \Phi(u) + 2\pi, \quad u \in \mathrm{Ei}(A). \tag{4.25}$$

Dla dowolnie zadanego $z \in A$ rozważmy zbiór

$$A_z := \left\{e^{i\Phi(u)} : u \in \mathrm{Ei}(A) \wedge e^{iu} = z\right\}. \tag{4.26}$$

Ponieważ $z = |z|e^{i\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, więc $u := \alpha - i\log|z| \in \mathrm{Ei}(A)$ i $e^{iu} = z$. Dlatego $A_z \neq \emptyset$. Wybierając dowolnie $z', z'' \in A_z$ widzimy, że $z' = e^{i\Phi(u')}$ i $z'' = e^{i\Phi(u'')}$ dla pewnych $u', u'' \in \mathrm{Ei}(A)$ spełniających równości $e^{iu'} = z = e^{iu''}$. Stąd $u' - u'' = 2\pi n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Z (4.25) dostajemy

$$\Phi(u') = \Phi(u''+2\pi n) = \Phi(u'') + 2\pi n,$$

skąd

$$z' = e^{i\Phi(u')} = e^{i(\Phi(u'')+2\pi n)} = e^{i\Phi(u'')} \cdot e^{2\pi i n} = z''.$$

Dlatego zbiór A_z jest jednoelementowy dla każdego $z \in A$, i w konsekwencji istnieje dokładnie jedna funkcja $\varphi : A \to \mathbb{C}$ spełniająca warunek

$$A_z = \{\varphi(z)\}, \quad z \in A. \tag{4.27}$$

Porównując wzór (4.26) z równością (4.27) dostajemy ponadto

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(u)}, \quad u \in \mathrm{Ei}(A). \tag{4.28}$$

Lemat 4.6. *Dla każdego homeomorfizmu Φ zbioru $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ na siebie spełniającego warunek*

$$\Phi(z + 2\pi) = \Phi(z) + 2\pi, \quad z \in \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+), \tag{4.29}$$

istnieje dokładnie jeden homeomorfizm φ koła $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie taki, że $\varphi(0) = 0$ i

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(z)}, \quad z \in \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+). \tag{4.30}$$

Ponadto dla każdego $K \in [1; +\infty)$, jeśli $\Phi|_{\mathbb{C}_+} \in \mathrm{QC}(\mathbb{C}_+; K)$ to $\varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$.

Dowód. Zbiór $A := \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ jest radialny i $\mathrm{Ei}(A) = \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$. Ustalając dowolnie homeomorfizm Φ zbioru $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ na siebie spełniający warunek (4.29) widzimy, że istnieje dokładnie jedna funkcja $\varphi : \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ spełniająca równość $\varphi(0) = 0$ oraz warunek (4.28), i tym samym warunek (4.30).

W celu wykazania różnowartościowości odwzorowania φ ustalmy dowolnie $z_1, z_2 \in A$ i załóżmy, że $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Wtedy $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1}$ i $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2}$ dla pewnych $u_1, u_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ i na mocy (4.30),

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(u_1)} = \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1}) = \varphi(z_1) = \varphi(z_2) = \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(u_2)}.$$

Stąd $\Phi(u_1) - \Phi(u_2) = 2\pi n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, i wobec warunku (4.29) dostajemy

$$\Phi(u_1) = \Phi(u_2) + 2\pi n = \Phi(u_2 + 2\pi n).$$

Ponieważ Φ jest odwzorowaniem różnowartościowym, więc $u_1 = u_2 + 2\pi n$, skąd

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(u_2 + 2\pi n)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2} \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2} = z_2.$$

Dlatego $\varphi : A \xrightarrow{1-1} \mathbb{C}$. Ponadto $\varphi(z_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(u_1)} \neq 0 = \varphi(0)$. Ostatecznie

$$\varphi : \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \xrightarrow{1-1} \mathbb{C}. \tag{4.31}$$

Dla każdego $z \in A$ istnieje $u \in \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ taki, że $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$. Ponieważ $\Phi(\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)) = \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$, więc na mocy (4.30),

$$|\varphi(z)| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(u)}| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Im}\Phi(u)} \leqslant 1.$$

Dlatego $\varphi(A) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{D})$, co łącznie z równością $\varphi(0) = 0$ daje

$$\varphi(\mathrm{cl}(\mathbb{D})) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{D}). \tag{4.32}$$

Z drugiej strony, dla każdego $w \in A$, $w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Ponieważ $\alpha - \mathrm{i}\log|w| \in \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ i $\Phi(\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)) = \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$, więc $u := \Phi^{-1}(\alpha - \mathrm{i}\log|w|) \in \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$. Stąd $z := \mathrm{e}^{\mathrm{i}u} \in A$, i na mocy (4.30),

$$\varphi(z) = \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(u)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\mathrm{i}\log|w|)} = \mathrm{e}^{\log|w|+\mathrm{i}\alpha} = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = w.$$

Zatem $A \subset \varphi(A)$. Ponadto $\varphi(0) = 0$. Dlatego

$$\mathrm{cl}(\mathbb{D}) = A \cup \{0\} \subset \varphi(A) \cup \varphi(\{0\}) = \varphi(\mathrm{cl}(\mathbb{D})),$$

co łącznie z inkluzją (4.32) daje równość $\varphi(\mathrm{cl}(\mathbb{D})) = \mathrm{cl}(\mathbb{D})$. To wraz z (4.31) oznacza, że

$$\varphi : \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathrm{cl}(\mathbb{D}). \tag{4.33}$$

Wykażemy teraz, że φ jest odwzorowaniem ciągłym. Z własności (4.30) oraz wzorów (2.49), (2.50) i (2.51) wynika, że dla każdego $p \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(\theta_p(z)) = \varphi(\theta(z)) = \theta(\Phi(z)), \quad z \in \Omega_p \cap \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+),$$

oraz

$$\theta\Big(\Omega_p \cap \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)\Big) = \theta(\Omega_p) \cap \theta(\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)) = \Big(\mathbb{C} \setminus \{-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,p} : t \in [0;+\infty)\}\Big) \cap A.$$

Stąd dla każdego $p \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) = \theta(\Phi(\theta_p^{-1}(z))) = \theta \circ \Phi \circ \theta_p^{-1}(z), \quad z \in A \setminus \{-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,p} : t \in [0;+\infty)\}. \tag{4.34}$$

Ponieważ Φ jest odwzorowaniem ciągłym, więc φ jest odwzorowaniem ciągłym w każdym zbiorze $A \setminus \{-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,p} : t \in [0;+\infty)\}$, $p \in \mathbb{C}$, jako złożenie odwzorowań ciągłych. W konsekwencji φ jest odwzorowaniem ciągłym w zbiorze A. Pozostaje wykazać ciągłość φ w zerze. Ustalmy dowolnie ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in A$ taki, że

$$z_n \to 0, \quad \text{gdy } n \to +\infty. \tag{4.35}$$

Załóżmy, że ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto \varphi(z_n)$ nie jest zbieżny do 0. Wówczas istnieją $r \in (0;1)$ i ciąg rosnący $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że

$$|\varphi(z_{\sigma(n)})| \geqslant r, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.36}$$

Ponieważ $0 \notin A$, więc istnieje ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto \alpha_n \in [0; 2\pi]$ taki, że $z_n = |z_n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto u_n := \alpha_{\sigma(n)} - \mathrm{i}\log|z_{\sigma(n)}| \in \mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ spełnia na mocy (4.30) i (4.36) zależność

$$r \leqslant |\varphi(z_{\sigma(n)})| = |\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_n})| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(u_n)}\right| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Im}\Phi(u_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

skąd

$$\operatorname{Im}\Phi(u_n) \leqslant -\log(r), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.37}$$

Ponieważ funkcja odwrotna Φ^{-1} jest ciągła i zbiór $[0; 2\pi - \mathrm{i}\log(r)]$ jest zwarty, więc na mocy założenia (4.29),

$$c := \sup\Big(\operatorname{Im}\Phi^{-1}\Big(\{u \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Im} u \leqslant -\log(r)\}\Big)\Big) < +\infty.$$

To łącznie z (4.37) daje $\operatorname{Im} u_n \leqslant c$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dlatego

$$|z_{\sigma(n)}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_n}| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Im} u_n} \geqslant \mathrm{e}^{-\operatorname{Im} c} > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

co przeczy warunkowi zbieżności (4.35). Dlatego $\varphi(z_n) \to 0 = \varphi(0)$, gdy $n \to +\infty$, co dowodzi ciągłości funkcji φ w punkcie 0. W konsekwencji funkcja φ jest ciągła w zbiorze $\mathrm{cl}(\mathbb{D}) = A \cup \{0\}$. Ponieważ koło domknięte $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ jest zbiorem zwartym i zachodzi własność (4.33), więc φ jest homeomorfizmem koła $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie.

Załóżmy na koniec, że dla dowolnie zadanego $K \in [1; +\infty)$, $\Phi \in \mathrm{QC}(\mathbb{C}_+; K)$. Ponieważ θ_p jest odwzorowaniem konforemnym w każdym pasie Ω_p, $p \in \mathbb{C}$, więc $\theta_p^{-1} \in \mathrm{QC}(A_p; 1)$, gdzie $A_p := \mathbb{D} \setminus \{-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Re} p} : t \in [0; 1)\}$ dla $p \in \mathbb{C}$; por. (2.50) i (2.51). Stąd i z (2.56) wynika, że

$$\Phi \circ \theta_p^{-1} \in \mathrm{QC}(A_p; K) \subset \mathrm{QR}(A_p; K), \quad p \in \mathbb{C}.$$

To wobec uwagi 1.19 i zależności (4.34) implikuje, że $\varphi|_{A_p} \in \mathrm{QR}(A_p; K)$ dla $p \in \mathbb{C}$, i w konsekwencji $\varphi|_{\mathbb{D}\setminus\{0\}} \in \mathrm{QR}(\mathbb{D} \setminus \{0\}; K)$. Ponieważ φ jest homeomorfizmem koła $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie i $\varphi(0) = 0$, więc $\varphi|_{\mathbb{D}\setminus\{0\}} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D} \setminus \{0\}; K)$. Z twierdzenia o usuwaniu osobliwości dla odwzorowań quasikonforemnych [18, Theorem 8.1, p. 41] wynika, że $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.7. *Dla dowolnych* $M \in [1; +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ *i* $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; m) \cap \mathrm{QS}(\mathbb{R}; M)$ *istnieje* $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D}; M^2)$ *taki, że* f *ma ciągłe rozszerzenie* f^* *na* $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $\deg(f, 0) = m$ *i*

$$f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.38}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $M \in [1;+\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ i $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R};m) \cap \mathrm{QS}(\mathbb{R};M)$. Niech Ψ będzie rozszerzeniem Beurlinga-Ahlforsa funkcji h z parametrem $s \in \mathbb{R}_+$, tzn.

$$\Psi(z) := \frac{1}{2y}\int_{-y}^{y} h(x+t)\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{i}s}{2y}\int_0^y [h(x+t)-h(x-t)]\mathrm{d}t, \quad z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}_+; \tag{4.39}$$

por. [4] i [1, Chap. IV, Sec. B], a także [27]. Ponieważ $h \in \mathrm{QS}(\mathbb{R};M)$, więc na mocy twierdzenia Beurlinga-Ahlforsa [4] istnieje $s \in \mathbb{R}_+$ o tej własności, że

$$\Psi \in \mathrm{QC}(\mathbb{C}_+;M^2). \tag{4.40}$$

Ponadto $\Psi(\mathbb{C}_+) = \mathbb{C}_+$ i odwzorowanie Ψ ma rozszerzenie do homeomorfizmu Ψ^* domkniętej półpłaszczyzny $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ na siebie i $\Psi^*|_{\mathbb{R}} = h$. Przyjmując więc

$$\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+) \ni z \mapsto \mathit{\Phi}(z) := \frac{1}{m}\Psi^*(z), \tag{4.41}$$

stwierdzamy, że $\mathit{\Phi}$ jest homeomorfizmem zbioru $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ na siebie. Ustalmy dowolnie $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}_+$. Wtedy $z+2\pi = x+2\pi+\mathrm{i}y$, i wobec wzoru (4.39) dostajemy

$$\mathrm{Re}\,\Psi(z+2\pi) = \frac{1}{2y}\int_{-y}^{y} h(x+2\pi+t)\mathrm{d}t.$$

Ponieważ $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R};m)$, więc

$$h(t+2\pi) = h(t) + 2\pi m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.42}$$

skąd na mocy wzoru (4.39),

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\Psi(z+2\pi) &= \frac{1}{2y}\int_{-y}^{y}[h(x+t)+2\pi m]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2y}\int_{-y}^{y} h(x+t)\mathrm{d}t + \frac{2\pi m}{2y}\int_{-y}^{y}\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{Re}\,\Psi(z) + 2\pi m.\end{aligned}$$

Dlatego

$$\mathrm{Re}\,\Psi(z+2\pi) = \mathrm{Re}\,\Psi(z) + 2\pi m, \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{4.43}$$

Podobnie ze wzoru (4.39) i zależności (4.42) wyprowadzamy

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\Psi(z+2\pi) &= \frac{s}{2y}\int_0^y [h(x+2\pi+t)-h(x+2\pi-t)]\mathrm{d}t\\ &= \frac{s}{2y}\int_0^y [h(x+t)-h(x-t)]\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\,\Psi(z).\end{aligned}$$

To łącznie z (4.43) daje

$$\Psi(z+2\pi)=\Psi(z)+2\pi m,\quad z\in\mathbb{C}_+. \tag{4.44}$$

Stąd na mocy wzoru (4.41),

$$\Phi(z+2\pi)=\Phi(z)+2\pi,\quad z\in\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+). \tag{4.45}$$

Ponadto na mocy (4.40), $\Phi|_{\mathbb{C}_+}\in\mathrm{QC}(\mathbb{C}_+;M^2)$. Z lematu 4.6 wynika więc istnienie homeomorfizmu φ koła domkniętego $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ na siebie takiego, że $\varphi|_{\mathbb{D}}\in\mathrm{QC}(\mathbb{D};M^2)$, $\varphi(0)=0$ i zachodzi zależność (4.30). Ponieważ funkcja

$$\mathbb{D}\ni z\mapsto f(z):=\varphi(z)^m \tag{4.46}$$

jest złożeniem funkcji holomorficznej $\mathbb{C}\ni z\mapsto z^m$ z odwzorowaniem M^2-quasikonforemnym $\varphi|_{\mathbb{D}}$ od wewnątrz, więc na mocy uwagi 1.19, $f\in\mathrm{QR}(\mathbb{D};M^2)$. Ze wzoru (4.46) wynika również, że funkcja f ma ciągłe rozszerzenie f^* na $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i

$$f^*(z)=\varphi(z)^m,\quad z\in\mathbb{T}. \tag{4.47}$$

Ustalmy dowolnie $t\in\mathbb{R}$. Z (4.30) wynika, że

$$\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\mathrm{i}\log(r))})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(t-\mathrm{i}\log(r))},\quad r\in(0;1],$$

skąd

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\lim_{r\to1^-}\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\lim_{r\to1^-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(t-\mathrm{i}\log(r))}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(t)},\quad r\in(0;1].$$

Ponieważ $\Phi|_{\mathbb{R}}=h/m$, więc na mocy (4.47) dostajemy

$$f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^m=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(t)}\right)^m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\Phi(t)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)},\quad t\in\mathbb{R},$$

co dowodzi własności (4.38). Ze wzoru (4.46) wynika, że $f^{-1}(\{0\})=\{0\}$. W konsekwencji, $\mathrm{R}(f^*,0)=(0;1]$, i wobec wniosku 3.5,

$$\deg(f,0)=\deg(f[0,1/2])=\deg(f^*[0,1/2])=\deg(f^*[0,1]). \tag{4.48}$$

Ponieważ $f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)}$ dla $t\in\mathbb{R}$, więc $f^*[0,1](\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)}$ dla $t\in\mathbb{R}$, czyli $h\in\mathrm{Log}(f^*[0,1])$. Stąd i z (4.42) otrzymujemy na podstawie lematu 3.2,

$$\deg(f^*[0,1])=\frac{h(2\pi)-h(0)}{2\pi}=\frac{2\pi m}{2\pi}=m.$$

To łącznie z (4.48) daje równość $\deg(f,0)=m$, co kończy dowód. □

Uwaga 4.8. Z twierdzenia 4.7 wynika w szczególności twierdzenie 4.2. Ustalmy bowiem dowolnie $M \in [1;+\infty)$ i $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{T};M)$. Istnieją wtedy $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ takie, że funkcja $\mathbb{T} \ni z \mapsto \tilde{g}(z) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z)$ spełnia równości $\tilde{g}(1) = 1$ i $\tilde{g}(-1) = -1$. Ponadto $\tilde{g} \in \mathrm{QS}(\mathbb{T};M)$. Ponieważ $\deg(\tilde{g}) > 0$, więc z twierdzenia 2.11 oraz lematów 2.7 i 2.10 wynika, że istnieje $h \in \mathrm{Log}(\tilde{g}) \cap \mathrm{Hom}(\mathbb{R};1)$ spełniający równości $h(n\pi) = n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Ponadto dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $y \in (0;\pi]$,

$$\frac{|\tilde{g}(I_1)|_1}{|\tilde{g}(I_2)|_1} = \frac{h(x+y)-h(x)}{h(x)-h(x-y)}, \tag{4.49}$$

gdzie $I_1 = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [x;x+y]\}$ i $I_2 = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [x-y;x]\}$. Ponieważ $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{T};M)$, więc $\tilde{g} \in \mathrm{QS}(\mathbb{T};M)$, co wobec (4.49) daje

$$\frac{1}{M} \leqslant \frac{h(x+y)-h(x)}{h(x)-h(x-y)} \leqslant M, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in (0;\pi]. \tag{4.50}$$

Korzystając z równości $h(n\pi) = n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$ można wywnioskować z warunku (4.50), że $h \in \mathrm{QS}(\mathbb{R};M)$; por. [16, Lemma 1]. Ponieważ $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R};1)$, więc z twierdzenia 4.7 wynika istnienie $\tilde{f} \in \mathrm{QR}(\mathbb{D};M^2)$ takiego, że $\tilde{f}$ ma ciągłe rozszerzenie $\tilde{f}^*$ na $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, $\tilde{f}^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $\deg(\tilde{f},0) = 1$ i

$$\tilde{f}^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)} = \tilde{g}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.51}$$

Stąd $\mathrm{CS}(\tilde{f}) = \mathbb{T}$. Ponieważ $|\tilde{f}(0)| = 0 < 1$, więc z twierdzenia 3.12 wynika, że $\tilde{f} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};M^2)$ i $\tilde{f}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Przyjmując $\mathbb{D} \ni z \mapsto f(z) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\tilde{f}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}z)$ widzimy, że $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};M^2)$ i $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $f(0) = 0$. Ponadto f ma ciągłe rozszerzenie f^* na $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i zgodnie z (4.51),

$$f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\tilde{f}^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\alpha)}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\tilde{g}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\alpha)}) = g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\alpha)}) = g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zatem $f^*|_{\mathbb{T}} = g$, co daje tezę twierdzenia 4.2.

4.3 Uwagi uzupełniające

Niech $\mathrm{QS}(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę wszystkich *funkcji quasisymetrycznych na* $\mathbb{R}$, tzn.

$$\mathrm{QS}(\mathbb{R}) := \bigcup_{M \in [1;+\infty)} \mathrm{QS}(\mathbb{R};M).$$

Szereg ważnych własności funkcji klasy $\mathrm{QS}(\mathbb{R})$ można znaleźć między innymi w [14], [18], [1], [26], [36]. Z twierdzeń 4.4 i 4.7 wynika natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 4.9. *Dla każdego $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$, jeśli $|f(0)| < 1$ i $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$ to istnieją $m \in \mathbb{N}$ i $h \in \mathrm{QS}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; m)$ takie, że f ma ciągłe rozszerzenie f^* na $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ oraz*

$$f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.52}$$

Na odwrót, dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$ i $h \in \mathrm{QS}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; m)$ istnieje $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ o tej własności, że f ma ciągłe rozszerzenie f^* na $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i zachodzi warunek (4.52).

Uwaga 4.10. Oszacowanie (4.6) w twierdzeniu 4.4 można wyrazić w równoważny sposób korzystając z klasycznej tożsamości

$$\frac{1-\Phi_K(t)}{1+\Phi_K(t)} = \Phi_{1/K}\Big(\frac{1-t}{1+t}\Big), \quad t \in [0;1]; \tag{4.53}$$

por. [2, Theorem 3.3]. Przekształcając prawą stronę w nierówności (4.6) otrzymujemy

$$M \leqslant \Phi_{1/K}\Big(\frac{1-r}{1+r}\Big)^{-1} \leqslant 4^{K-1}\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big)^{K}. \tag{4.54}$$

Druga z tych nierówności jest konsekwencją dolnego oszacowania $\Phi_{1/K}(t) \geqslant 4^{1-K}t^K$ dla $t \in [0;1]$; por. [18, (3.8), p. 65]. Stosując dodatkowo oszacowanie $\lambda(t) \leqslant \mathrm{e}^{\pi(t-1/t)}$ dla $t \in [1;+\infty)$ (por. [2, Theorem 1.2]) otrzymujemy

$$\lambda(K)M^2 \leqslant \mathrm{e}^{\pi(K-1/K)}16^{K-1}\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big)^{2K}. \tag{4.55}$$

Szereg istotnych wyników dotyczących aproksymacji funkcji Φ_K, $\Phi_{1/K}$ i λ można znaleźć w [21] i [22].

Uwaga 4.11. W twierdzeniach 4.4 i 4.7 oraz wniosku 4.9 brzegowe wartości zespolonych odwzorowań quasiregularnych zostały scharakteryzowane za pomocą funkcji quasisymetrycznych na $\mathbb{R}$. Warunek M-quasisymetrii (4.4) wiąże dwa parametry rzeczywiste x i y. Zamiast charakteryzacji Berlinga-Ahlforsa można wykorzystać charakteryzację z czterema parametrami rzeczywistymi. Zając wykazał w [36], że dla dowolnych $K \in [1;+\infty)$ i $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{C}_+; K)$ spełniającego równość $f(\mathbb{C}_+) = \mathbb{C}_+$, odwzorowanie f ma rozszerzenie do homeomorfizmu f^* domkniętej półpłaszczyzny $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ na siebie, którego funkcja brzegowa $h := f^*|_{\mathbb{R}}$ spełnia dla każdego ciągu rosnącego $\mathbb{Z}_{1,4} \ni k \mapsto z_k \in \mathbb{R}$ warunek brzegowy

$$\Phi_{1/K}([z_1,z_2,z_3,z_4]) \leqslant [h(z_1),h(z_2),h(z_3),h(z_4)] \leqslant \Phi_K([z_1,z_2,z_3,z_4]), \tag{4.56}$$

gdzie

$$[z_1,z_2,z_3,z_4] := \sqrt{\frac{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}}. \tag{4.57}$$

Korzystając z warunku (4.56) i własności funkcji Φ_K można otrzymać wiele interesujących własności funkcji brzegowych odwzorowań quasikonforemnych górnej półpłaszczyzny na siebie; por. [36]. Z nich z kolei można wyprowadzić szereg własności odwzorowań $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D})$ spełniających warunki $|f(0)| \neq 1$ i $\mathrm{CS}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. W podobnym charakterze można użyć charakteryzacji z trzema parametrami rzeczywistymi; por. [24], [25].

Z twierdzeń 2.17 i 2.18 można wyprowadzić, korzystając z twierdzenia 3.12, następujące uogólnienia tych twierdzeń na odwzorowania quasiregularne.

Wniosek 4.12. *Dla dowolnych* $K \in [1;+\infty)$ *i* $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D};K)$, *jeśli* $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$ *i* $f(0) = 0$ *to*

$$|f(z)| \leqslant \Phi_K(|z|), \quad z \in \mathbb{D}; \tag{4.58}$$

co więcej, jeśli w (4.58) *pojawia się równość dla pewnego* $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, *to* $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$.

Dowód. Ustalmy dowolnie K i f spełniające założenia wniosku. Z twierdzenia 3.12 wynika istnienie $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$ i skończonego iloczynu Blaschkego g takich, że $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$ i $f = g \circ \varphi$. Ponadto $A := f^{-1}(\{0\})$ jest niepustym zbiorem skończonym, $\deg(f,a) \in \mathbb{N}$ dla $a \in A$ i zachodzi równość (3.40) dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Stąd $g(0) = g(\varphi(0)) = f(0) = 0$. Ponieważ $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ i $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, więc z klasycznej nierówności Schwarza wynika, że $|g(z)| \leqslant |z|$ dla $z \in \mathbb{D}$; por. np. [29, Chap. 12]. Stąd na mocy twierdzenia 2.17 dostajemy

$$|f(z)| = |g(\varphi(z))| \leqslant |\varphi(z)| \leqslant \Phi_K(|z|), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.59}$$

co dowodzi nierówności (4.58). Załóżmy na koniec, że w (4.58) pojawia się równość dla pewnego $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Wtedy wszystkie nierówności w (4.59) stają się równościami, a w szczególności $|g(\varphi(z))| = |\varphi(z)|$. Ponieważ $\varphi(z) \neq 0$, więc istnieje stała $\eta \in \mathbb{T}$ taka, że $g(u) = \eta u$ dla $u \in \mathbb{D}$. W konsekwencji, $f = \eta\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$, co kończy dowód. □

Wniosek 4.13. *Dla dowolnych* $K \in [1;+\infty)$ *i* $f \in \mathrm{QR}(\mathbb{D};K)$, *jeśli* $|f(0)| \neq 1$ *i* $\mathrm{CS}(f) \subset \mathbb{T}$ *to* $A := f^{-1}(\{0\})$ *jest niepustym zbiorem skończonym,* $\deg(f,a) \in \mathbb{N}$ *dla* $a \in A$ *i*

$$|f(z) - f(w)| \leqslant 16m\frac{1+\Phi_K(r)}{1-\Phi_K(r)}|z-w|^{1/K}, \quad z,w \in \mathbb{D}, \tag{4.60}$$

gdzie $r := \max(\{|a| : a \in A\})$ *i* $m := \sum_{a\in A}\deg(f,a)$.

Dowód. Ustalmy dowolnie K i f spełniające założenia wniosku. Z twierdzenia 3.12 wynika istnienie $\varphi \in \mathrm{QC}(\mathbb{D};K)$ i skończonego iloczynu Blaschkego g takich, że $\varphi(\mathbb{D}) =$

$\mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$ i $f = g \circ \varphi$. Ponadto $A := f^{-1}(\{0\})$ jest niepustym zbiorem skończonym, $\deg(f, a) \in \mathbb{N}$ dla $a \in A$ i zachodzi równość (3.40) dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Stąd dla każdego $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
|g'(z)| &= \Big|\sum_{a\in A} \deg(f,a)\Big(\frac{z-\varphi(a)}{1-\overline{\varphi(a)}z}\Big)^{\deg(f,a)-1}\frac{1-|\varphi(a)|^2}{(1-\overline{\varphi(a)}z)^2}\prod_{b\in A\setminus\{a\}}\Big(\frac{z-\varphi(b)}{1-\overline{\varphi(b)}z}\Big)^{\deg(f,b)}\Big| \\
&\leqslant \sum_{a\in A} \deg(f,a)\Big|\frac{z-\varphi(a)}{1-\overline{\varphi(a)}z}\Big|^{\deg(f,a)-1}\frac{1-|\varphi(a)|^2}{|1-\overline{\varphi(a)}z|^2}\prod_{b\in A\setminus\{a\}}\Big|\frac{z-\varphi(b)}{1-\overline{\varphi(b)}z}\Big|^{\deg(f,b)} \\
&\leqslant \sum_{a\in A} \deg(f,a)\frac{1-|\varphi(a)|^2}{(1-|\overline{\varphi(a)}|)^2} \\
&= \frac{1+|\varphi(a)|}{1-|\varphi(a)|}\sum_{a\in A}\deg(f,a) \\
&= m\frac{1+|\varphi(a)|}{1-|\varphi(a)|},
\end{aligned}$$

gdy zbiór zawiera co najmniej dwa punkty, oraz

$$\begin{aligned}
|g'(z)| &= \Big|\deg(f,a)\Big(\frac{z-\varphi(a)}{1-\overline{\varphi(a)}z}\Big)^{\deg(f,a)-1}\frac{1-|\varphi(a)|^2}{(1-\overline{\varphi(a)}z)^2}\Big| \\
&= \deg(f,a)\Big|\frac{z-\varphi(a)}{1-\overline{\varphi(a)}z}\Big|^{\deg(f,a)-1}\frac{1-|\varphi(a)|^2}{|1-\overline{\varphi(a)}z|^2} \\
&\leqslant m\frac{1+|\varphi(a)|}{1-|\varphi(a)|},
\end{aligned}$$

gdy $A = \{a\}$ dla pewnego $a \in \mathbb{D}$. Z twierdzenia 2.17 wynika więc, że

$$|g'(z)| \leqslant m\frac{1+|\varphi(a)|}{1-|\varphi(a)|} \leqslant M := m\frac{1+\Phi_K(r)}{1-\Phi_K(r)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ponieważ koło $\mathbb{D}$ jest zbiorem wypukłym, więc

$$|g(z) - g(w)| \leqslant M|z-w|, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Stosując teraz twierdzenie 2.18 widzimy, że

$$|f(z) - f(w)| = |g(\varphi(z)) - g(\varphi(w))| \leqslant M|\varphi(z) - \varphi(w)| \leqslant 16M|z-w|^{1/K}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

To dowodzi własności (4.60), i tym samym kończy dowód. □

Bibliografia

[1] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey-Toronto-New York-London, 1966.

[2] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy, and M. Vuorinen, *Distortion functions for plane quasiconformal mappings*, Israel J. Math. **62** (1988), 1–16.

[3] R. B. Ash, *Real Analysis and Probability*, Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, Inc., New York and London, 1972.

[4] A. Beurling and L. V. Ahlfors, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Acta Math. **96** (1956), 125–142.

[5] B. Bojarski, *Homeomorphic solution of Beltrami systems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **102** (1955), 661–664.

[6] ______, *Generalized solutions of a system of differential equations of the first order and elliptic type with discontinuous coefficients*, Mat. Sb. N. S. **43** (1957), 451–503.

[7] ______, *On the Beltrami equation, once again: 54 years later*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **35** (2010), 59–73.

[8] P. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge Tracts in Mathematics 156, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[9] S. Eilenberg, *Transformations continues en circonfŕence et la topologie du plan*, Fundamenta Mathematicae **26** (1936), 61–112.

[10] P. Fatou, *Sur les fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur d'un cercle*, Bulletin de la Société Mathématique de France **51** (1923), 191–202.

[11] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press., Cambridge, 2002.

[12] J. Hersch and A. Pfluger, *Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris. **234** (1952), 43–45.

[13] M. Jastrzębska and D. Partyka, *Exponential representations of injective continuous mappings in radial sets*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A **75** (2021), 37–51.

[14] J. A. Kelingos, *Boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Michigan Math. J. **13** (1966), no. 2, 235–249.

[15] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[16] J. G. Krzyż, *Quasicircles and harmonic measure*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **12** (1987), 19–24.

[17] K. Kuratowski, *Introduction to Set Theory and Topology*, 2nd english ed., International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol. 101, Pergamon Press, Oxford, 2014.

[18] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, 2nd ed., Grundlehren 126, Springer, Berlin, 1973.

[19] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, 1973.

[20] A. Mori, *On quasi-conformality and pseudo-analyticity*, Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 56–77.

[21] D. Partyka, *Approximation of the Hersch-Pfluger distortion function. Applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A **45** (1992), 99–111.

[22] ______, *Approximation of the Hersch-Pfluger distortion function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **18** (1993), 343–354.

[23] ______, *The generalized Neumann-Poincaré operator and its spectrum*, Dissertationes Math., vol. 366, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1997.

[24] D. Partyka and K. Sakan, *A conformally invariant dilatation of quasisymmetry*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A **53** (1999), 167–181.

[25] ______, *On pseudo-metrics on the space of generalized quasisymmetric automorphisms of a Jordan curve*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A **55** (2001), 115–138.

[26] D. Partyka and J. Zając, *An estimation of the integral of quasisymmetric functions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **40** (1986), 171–183.

[27] ______, *On modification of the Beurling-Ahlfors extension of a quasisymmetric function*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź **40** (1990), no. 11-20, 45–52, Série: Recherches sur les déformations.

[28] S. Rickman, *Quasiregular Mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 26, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

[29] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third ed., McGraw-Hill International Editions, Mathematics Series, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1987.

[30] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste. Tom I*, PWN, Warszawa, 1959.

[31] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 229, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1971.

[32] M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **11** (1976), 42 pp.

[33] ______, *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings*, Lecture Notes in Math., 1319, Springer, Berlin, 1988.

[34] H. Weyl, *Meromorphic Functions and Analytic Curves*, Princeton University Press, Princeton, 1943.

[35] J. Zając, *Functional identities for special functions of quasiconformal theory*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **18** (1993), 93–103.

[36] ______, *Quasihomographies in the theory of Teichmüller spaces*, Dissertationes Math., vol. 357, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1996.